

aux alentours de n , il y a environ $1/\log n$ nombres premiers (exemple : puisque $\log 1\,000\,000$ égale 13,81, vers le millionième nombre entier, il y a environ un nombre premier sur 14). Ce «théorème des nombres premiers» a été démontré en même temps par le Français Jacques Hadamard et le Belge Charles-Jean de la Vallée Poussin en 1896. (Ils vécurent respectivement jusqu'à l'âge de 98 et 96 ans : le meilleur moyen pour vivre âgé est de démontrer un tel théorème !)

RARÉFACTION

On constate que les nombres premiers jumeaux considérés parmi les nombres premiers se raréfient aussi. Un argument heuristique (c'est-à-dire qui «suggère» sans prouver rigoureusement) conduit à penser que les nombres premiers jumeaux ont une densité égale à $1/\log n$ parmi les nombres premiers (ou, ce qui revient au même, une densité de $1/(\log n)^2$ parmi les nombres entiers). L'argument est simple : «la probabilité que p et que $p+2$ soient simultanément premiers est le produit de la probabilité que p soit premier par celle que $p+2$ le soit, car les événements sont indépendants et «donc» le « $1/\log n$ » du théorème des nombres premiers fournit un « $1/(\log n)^2$ » (car la probabilité de la conjonction de deux événements indépendants est le produit de leurs probabilités).

Cet argument est non seulement insuffisant, mais extrêmement dangereux. En l'appliquant à p et à $p+1$, on déduit que la densité des paires de nombres consécutifs premiers est $1/(\log n)^2$, alors qu'elle est nulle, puisque, quel que soit p , l'un des deux nombres p ou $p+1$ est pair.

G. Hardy et J. Littlewood ont proposé une conjecture (toujours non prouvée, bien sûr) selon laquelle le nombre noté $\pi_2(m)$ de nombres premiers jumeaux inférieurs à m est approché par la formule : $\pi_2(m) \approx 2 C_2 m / (\log m)^2$, où C_2 est la constante des nombres premiers jumeaux. Dans la formule définissant C_2 , les nombres p sont premiers : $C_2 = (1-1/2^2)(1-1/4^2)(1-1/6^2)\dots(1-1/(p-1)^2)\dots = 0,6601618158468695739278121\dots$

On pourrait être tenté de rire du culot des mathématiciens : incapables de montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux, ils énoncent des résultats considérablement plus forts (donc plus difficiles) concernant leur répartition ! Leur attitude est celle d'un alpiniste qui, après avoir échoué dans l'ascension du Mont-Blanc, annoncerait : «Ça ne fait rien, ma prochaine escalade sera l'Everest.» Ce culot est cependant justifié : en mathématiques, il est souvent arrivé qu'on aboutisse dans une recherche en prouvant un théorème beaucoup plus général et plus fort que celui que l'on visait initiale-

2. LES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX

(a) Nombres premiers et premiers jumeaux jusqu'à 2000

Les nombres premiers jumeaux sont séparés de deux unités. La conjecture des nombres premiers jumeaux affirme qu'il y en a une infinité. On a proposé une conjecture précise : il y en aurait environ $1,32 n / (\log n)^2$ parmi les nombres inférieurs à n .

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59
61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233
239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337
347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439
443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557
563	569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883
887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117
1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249
1259	1277	1279	1283	1289	1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381
1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493
1499	1511	1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607	1609	1613
1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741	1747
1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879
1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987	1993	1997	1999	2003		

(b) Raréfaction des nombres premiers jumeaux

	nombres de nombres premiers	nombres de premiers jumeaux	pourcentages de premiers jumeaux
10^3	168	35	20,83
10^4	1229	205	16,68
10^5	9592	1224	12,76
10^6	78498	8169	10,41
10^7	664579	58980	8,87
10^8	5761455	440312	7,65
10^9	50847534	3424506	6,73
10^{10}	455052511	27412679	6,02
10^{11}	4118054813	224376048	5,45
10^{12}	37607912018	1870585220	4,97
10^{13}	346065536839	15834664872	4,56
10^{14}	3204941750802	135780321665	4,22
10^{15}	29844570422669	1177209242304	3,94

(c) Les plus grandes paires de premiers jumeaux connues

$835335 \times 2^{39014} \pm 1$	11751 chiffres	Ballinger et Gallot 1998
$242206083 \times 2^{3880} \pm 1$	11713 chiffres	Jarai et Indlekofer 1995
$40883037 \times 2^{3356} \pm 1$	6696 chiffres	Lifchitz et Gallot 1998
$361700055 \times 2^{39020} \pm 1$	11755 chiffres	Lifchitz 1999

(d) Caractérisations et formules

n est le premier élément d'une paire de nombres premiers jumeaux si et seulement si :

- $4((n-1)! + 1) + n$ est un multiple de $n(n+2)$
- ou $(n-1)!(3n+2)+2n+2$ est un multiple de $n(n+2)$
- ou $(n-1)!(n-2)-2$ est un multiple de $n(n+2)$.

On en déduit que la formule suivante engendre tous les nombres premiers jumeaux quand n décrit l'ensemble des entiers ≥ 0 :

$$j(n) = 3 + n[(4(n+2)! + n + 7)/(n+3)(n+5) - ((4(n+2)! + n + 6)/(n+3)(n+5))].$$

(e) Polynôme qui donne tous les nombres premiers jumeaux

Lorsque les variables $a, b, \dots, z$ décrivent l'ensemble des entiers positif ou nul, les valeurs positives du polynôme suivant, dû à Christoph Baxa (et tiré de la théorie des équations diophantiennes), décrivent l'ensemble des nombres p tels que $p, p+2$ constituent une paire de premiers jumeaux :

$$\begin{aligned} & (k+2)(1-(wz+h+j-q)^2 - ((g+1)(h+j)+h-z)^2 - (p+q+z+2n-e)^2 \\ & - (e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2 - ((a^2-1)(n+l+v)^2+1-x^2)^2 - (16(a^2-1)(n+l+v)^2+1-x^2)^2 \\ & - (((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4d(n+l+v))^2+1-(x+cu)^2)^2 - ((a^2-1)l^2+1-m^2)^2 \\ & - (p+l(a-n-1)+b(2a(n+1)-(n+1)2-1)-m)^2 - (q+(n+l+v)(a-p-1) \\ & +s(2a(p+1)-(p+1)^2-1)-x)^2 - (z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm)^2 \\ & - (16(k+1)3(k+2)(n+1)2+1-f^2)^2 - (k+1+ia-i-l)^2 - (4g+k+10-y(k+2)(k+4))^2). \end{aligned}$$

3. NOMBRES PREMIERS Jumeaux, Cousins et SEXY : LA CONJECTURE DE POLIGNAC

Deux nombres premiers jumeaux sont écartés de 2, comme 11 et 13. Deux nombres premiers cousins sont écartés de 4 (comme 7–11 ou 13–17). S'ils sont écartés de 6 (comme 5–11, 7–13, 11–17, 13–19, 23–29 ou 31–37), ce sont des nombres premiers «sexy». On conjecture qu'il y a une infinité de nombres premiers cousins et de nombres premiers sexy. Plus généralement, on examine les paires de nombres premiers dont l'écart est $2k$. La conjecture de Polignac est que, pour chaque k positif, il existe une infinité de ces paires. Hardy et Littlewood, armés d'arguments heuristiques, ont précisé la conjecture : si on note $\pi_d(m)$, le nombre de paires de nombres premiers dont l'écart est d alors :

$$\pi_d(m) \approx 2 C_j \frac{m}{(\log m)^2} \prod_{p|d, p>2} \frac{(p-1)}{(p-2)}$$

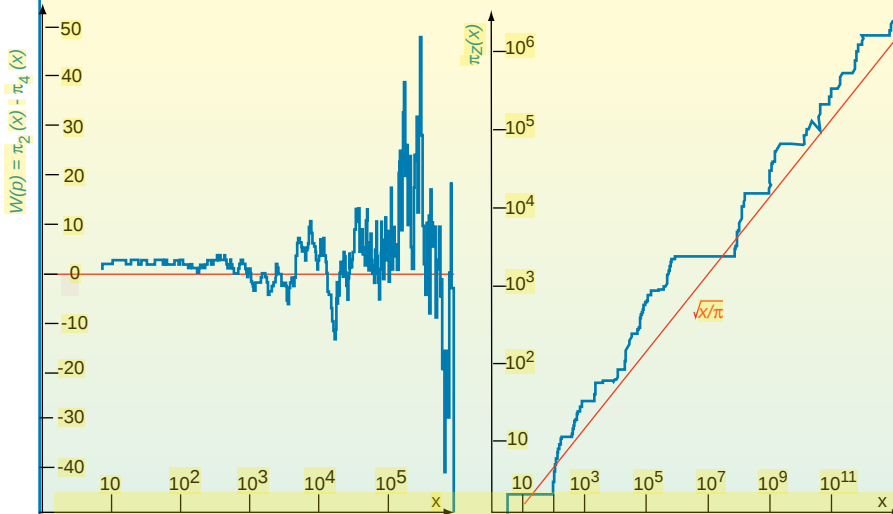
avec $C_j = 0,6601618158468...$ constante des nombres premiers jumeaux

$$C_j = (1-1/2^2)(1-1/4^2)(1-1/6^2)(1-1/10^2) \dots = \prod_{\text{premier}>2} (1 - \frac{1}{(p-1)^2})$$

Pour $d = 2$ et $d = 4$, le produit vaut 1. Pour $d = 6$, il vaut 2. Cela signifierait (si la conjecture est juste) qu'il existerait autant de nombres premiers jumeaux que de nombres premiers cousins et deux fois plus de nombres premiers sexy. Ces prédictions sont remarquablement en accord avec ce qu'on obtient, par exemple, en menant un décompte pour $n = 10^8$:

$\pi_2(10^8) = 440312$ $\pi_4(10^8) = 440258$ $\pi_6(10^8) = 879908$, voisines des valeurs données par les formules de Hardy et Littlewood : 440368, 440368 et 880736.

Récemment, M. Wolf s'est intéressé à la fonction $W(p)$ donnant la différence entre le nombre de nombres premiers jumeaux inférieurs à p et le nombre de nombres premiers cousins inférieurs à p : $W(p) = \pi_2(p) - \pi_4(p)$. Le graphe de cette fonction présente l'aspect d'une fractale dont la dimension a été évaluée à 1,48, valeur proche de celle que l'on trouve pour un mouvement brownien.



Fait remarquable, $W(p)$ semble rester plus proche de 0 que ce que l'analogie de la conjecture de Riemann pour les nombres premiers, jumeaux ou cousins laissait attendre. C'est une régularité inattendue dans le comportement des nombres premiers.

L'étude des nombres premiers p pour lesquels $W(p) = 0$ (valeur pour laquelle le nombre de nombres premiers jumeaux est exactement le même que le nombre de nombres premiers cousins) et la comparaison avec une marche aléatoire ont conduit M. Wolf à la conjecture que cette égalisation se produit environ $\sqrt{p/\pi}$ fois entre 0 et p . Le dessin de la courbe $\pi_2(p)$ qui compte ces nombres premiers entre 0 et p confirme la conjecture. Là encore, il s'agit d'une régularité inattendue dans le comportement des nombres premiers.

Les graphiques sont repris de l'article de M. Wolf : *On Twin and Cousin Primes*.

ment (c'est ce qui s'est passé avec le théorème de Fermat).

DES DÉBUTS DE PREUVES?

Une façon indirecte de formuler la conjecture des nombres premiers jumeaux consiste à l'énoncer sous la forme : «Le nombre 2 peut s'écrire d'une infinité de façons différentes sous la forme $p_1 - p_2$, p_1 et p_2 étant des nombres premiers.»

Des résultats très sérieux qui approchent cet énoncé ont été prouvés en utilisant la technique des cribles (qui généralise l'idée du crible d'Ératosthène). En 1920, Viggo Brun a ainsi démontré que le nombre 2 peut s'écrire d'une infinité de façons différentes sous la forme $p_1 - p_2$, les nombres p_1 et p_2 étant des nombres «9-presque-premiers», dont nous allons donner la définition : un nombre « k -presque-premier» est un nombre dont la décomposition en facteurs premiers a k facteurs au plus. Ainsi le nombre 169 égal à 13×13 est 2-presque-premier et 12 égal à $2 \times 2 \times 3$ est 3-presque-premier.

Le résultat de V. Brun est très loin du but qui sera atteint quand on aura remplacé «9-presque-premiers» par «1 presque-premiers», puisque bien sûr «être 1-presque-premier» équivaut à «être premier». Cependant les progrès ont été continus : en 1924, H. Rademacher a remplacé le 9 par 7, et, à la suite de travaux de A. Rényi en 1947 et de J. Chen en 1966, on sait maintenant que le nombre 2 s'écrit d'une infinité de façons différentes sous la forme $p_1 - p_2$ avec p_1 premier et p_2 un nombre 2-presque-premier. Ainsi, nous nous rapprochons : il n'y a plus qu'à remplacer 2-presque-premier par 1-presque-premier!

CONSTANTE DE V. BRUN

L'étude de la raréfaction des nombres premiers jumeaux fait intervenir la série des inverses des nombres premiers jumeaux. En 1919, le mathématicien V. Brun prouva que la série des inverses des nombres premiers jumeaux était convergente. Contrairement à la série des inverses des nombres premiers ($1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \dots$), qui devient infinie quand on augmente le nombre des termes, la série des inverses de nombres premiers jumeaux, égale à : $(1/3+1/5) + (1/5+1/7) + (1/11+1/19) + (1/29+1/31) + \dots$, est de valeur finie. Remarquez que l'on fait apparaître deux fois $1/5$, le second élément de la paire 3-5 en même temps que le premier de la paire 5-7.

Le fait que la série ait une valeur finie signifie qu'il y a infiniment moins de nombres premiers jumeaux que de nombres premiers. En effet, si, en moyenne, un nombre premier sur 100 était