

3. NOMBRES PREMIERS Jumeaux, Cousins et SEXY : LA CONJECTURE DE POLIGNAC

Deux nombres premiers jumeaux sont écartés de 2, comme 11 et 13. Deux nombres premiers cousins sont écartés de 4 (comme 7–11 ou 13–17). S'ils sont écartés de 6 (comme 5–11, 7–13, 11–17, 13–19, 23–29 ou 31–37), ce sont des nombres premiers «sexy». On conjecture qu'il y a une infinité de nombres premiers cousins et de nombres premiers sexy. Plus généralement, on examine les paires de nombres premiers dont l'écart est $2k$. La conjecture de Polignac est que, pour chaque k positif, il existe une infinité de ces paires. Hardy et Littlewood, armés d'arguments heuristiques, ont précisé la conjecture : si on note $\pi_d(m)$, le nombre de paires de nombres premiers dont l'écart est d alors :

$$\pi_d(m) \approx 2 C_j \frac{m}{(\log m)^2} \prod_{p|d, p>2} \frac{(p-1)}{(p-2)}$$

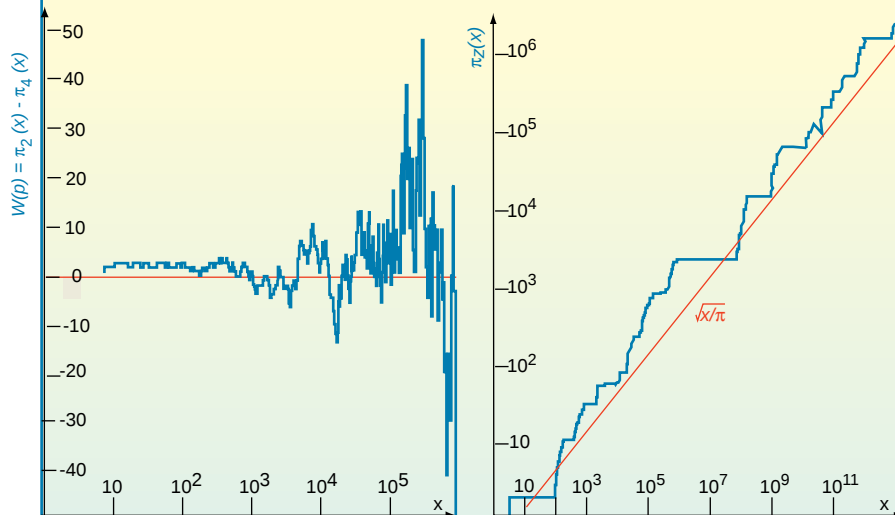
avec $C_j = 0,6601618158468...$ constante des nombres premiers jumeaux

$$C_j = (1-1/2^2)(1-1/4^2)(1-1/6^2)(1-1/10^2) \dots = \prod_{\text{premier } > 2} (1 - \frac{1}{(p-1)^2})$$

Pour $d = 2$ et $d = 4$, le produit vaut 1. Pour $d = 6$, il vaut 2. Cela signifierait (si la conjecture est juste) qu'il existerait autant de nombres premiers jumeaux que de nombres premiers cousins et deux fois plus de nombres premiers sexy. Ces prédictions sont remarquablement en accord avec ce qu'on obtient, par exemple, en menant un décompte pour $n = 10^8$:

$\pi_2(10^8) = 440312$ $\pi_4(10^8) = 440258$ $\pi_6(10^8) = 879908$, voisines des valeurs données par les formules de Hardy et Littlewood : 440368, 440368 et 880736.

Récemment, M. Wolf s'est intéressé à la fonction $W(p)$ donnant la différence entre le nombre de nombres premiers jumeaux inférieurs à p et le nombre de nombres premiers cousins inférieurs à p : $W(p) = \pi_2(p) - \pi_4(p)$. Le graphe de cette fonction présente l'aspect d'une fractale dont la dimension a été évaluée à 1,48, valeur proche de celle que l'on trouve pour un mouvement brownien.



Fait remarquable, $W(p)$ semble rester plus proche de 0 que ce que l'analogie de la conjecture de Riemann pour les nombres premiers, jumeaux ou cousins laissait attendre. C'est une régularité inattendue dans le comportement des nombres premiers.

L'étude des nombres premiers p pour lesquels $W(p) = 0$ (valeur pour laquelle le nombre de nombres premiers jumeaux est exactement le même que le nombre de nombres premiers cousins) et la comparaison avec une marche aléatoire ont conduit M. Wolf à la conjecture que cette égalisation se produit environ $\sqrt{p}/\pi$ fois entre 0 et p . Le dessin de la courbe $\pi_2(x)$ qui compte ces nombres premiers entre 0 et p confirme la conjecture. Là encore, il s'agit d'une régularité inattendue dans le comportement des nombres premiers.

Les graphiques sont repris de l'article de M. Wolf : *On Twin and Cousin Primes*.

ment (c'est ce qui s'est passé avec le théorème de Fermat).

DES DÉBUTS DE PREUVES?

Une façon indirecte de formuler la conjecture des nombres premiers jumeaux consiste à l'énoncer sous la forme : «Le nombre 2 peut s'écrire d'une infinité de façons différentes sous la forme $p_1 - p_2$, p_1 et p_2 étant des nombres premiers.»

Des résultats très sérieux qui approchent cet énoncé ont été prouvés en utilisant la technique des cribles (qui généralise l'idée du crible d'Ératosthène). En 1920, Viggo Brun a ainsi démontré que le nombre 2 peut s'écrire d'une infinité de façons différentes sous la forme $p_1 - p_2$, les nombres p_1 et p_2 étant des nombres «9-presque-premiers», dont nous allons donner la définition : un nombre « k -presque-premier» est un nombre dont la décomposition en facteurs premiers a k facteurs au plus. Ainsi le nombre 169 égal à 13×13 est 2-presque-premier et 12 égal à $2 \times 2 \times 3$ est 3-presque-premier.

Le résultat de V. Brun est très loin du but qui sera atteint quand on aura remplacé «9-presque-premiers» par «1 presque-premiers», puisque bien sûr «être 1-presque-premier» équivaut à «être premier». Cependant les progrès ont été continus : en 1924, H. Rademacher a remplacé le 9 par 7, et, à la suite de travaux de A. Rényi en 1947 et de J. Chen en 1966, on sait maintenant que le nombre 2 s'écrit d'une infinité de façons différentes sous la forme $p_1 - p_2$ avec p_1 premier et p_2 un nombre 2-presque-premier. Ainsi, nous nous rapprochons : il n'y a plus qu'à remplacer 2-presque-premier par 1-presque-premier!

CONSTANTE DE V. BRUN

L'étude de la raréfaction des nombres premiers jumeaux fait intervenir la série des inverses des nombres premiers jumeaux. En 1919, le mathématicien V. Brun prouva que la série des inverses des nombres premiers jumeaux était convergente. Contrairement à la série des inverses des nombres premiers ($1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \dots$), qui devient infinie quand on augmente le nombre des termes, la série des inverses de nombres premiers jumeaux, égale à : $(1/3+1/5) + (1/5+1/7) + (1/11+1/19) + (1/29+1/31) + \dots$, est de valeur finie. Remarquez que l'on fait apparaître deux fois $1/5$, le second élément de la paire 3-5 en même temps que le premier de la paire 5-7.

Le fait que la série ait une valeur finie signifie qu'il y a infiniment moins de nombres premiers jumeaux que de nombres premiers. En effet, si, en moyenne, un nombre premier sur 100 était