

une série d'équations polynomiales (comme $0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$).

Cependant, Babbage a réfléchi à un système plus ambitieux. Devenu l'ami d'Ada, il lui décrit les principes d'une nouvelle machine, la Machine analytique, beaucoup plus élaborée que la Machine à différences. Il passera les 38 années restantes de sa vie à en perfectionner les plans.

La collaboration avec Babbage

Babbage conçoit sa Machine analytique de sorte qu'elle puisse résoudre n'importe quel problème arithmétique ;

l'architecture qu'il envisage ressemble beaucoup à celle des ordinateurs d'aujourd'hui, avec un «magasin» (une mémoire), un «moulin» (un processeur) et un lecteur de cartes perforées (une unité d'entrée). Babbage a pris l'idée des cartes perforées au métier à tisser de Jacquard, qui tisse des motifs automatiquement à l'aide de telles cartes. En sortie, la machine doit produire une page imprimée ou des cartes perforées. La Machine analytique doit effectuer des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions ; elle doit exécuter ou répéter un ensemble d'instructions fondées sur certaines conditions («si

x , alors y »), un concept fondamental de l'informatique nommé branchement conditionnel.

En 1840, Babbage fait sa première et unique présentation de la Machine analytique à un groupe de mathématiciens et d'ingénieurs à Turin. Parmi eux se trouve Luigi Federico Menabrea, un jeune mathématicien, qui deviendra premier ministre d'Italie. Très intéressé, celui-ci publie un article en français intitulé *Notions sur la Machine analytique de Charles Babbage*.

L'article de Menabrea traite plutôt des principes mathématiques de la Machine à différences et de la Machine analytique que des opérations mécaniques sous-jacentes. Attentif à l'architecture de l'appareil, il reconnaît que la Machine analytique serait capable de calculer toute formule algébrique correctement exprimée (ou programmée) sur les cartes perforées. Menabrea écrit : «Les cartes sont une simple traduction de formules algébriques, ou, pour être plus exact, une autre forme de notation analytique.»

Ada, qui a épousé William King, comte de Lovelace, lit l'article de Menabrea et commence à le traduire en anglais. Babbage est resté un bon ami et, ayant entendu parler de ses travaux au début de 1843, l'encourage à annoter la traduction.

Cette suggestion marque le début d'une collaboration qui mène à la publication par Ada du premier article traitant dans le détail de la programmation d'un calculateur ; ce sera le seul article de ce genre pour près d'un siècle. L'article, augmenté de sept notes (de A à G), est trois fois plus long que l'article initial de Menabrea. Ces notes sont en grande partie consacrées à la programmation de la Machine analytique à l'aide des cartes perforées de Jacquard : «La Machine analytique se distingue par l'application du principe que Jacquard a conçu pour régler, à l'aide de cartes perforées, les motifs les plus compliqués dans la fabrication de brocards. Nous disons, fort à propos, que la Machine analytique *tisse des motifs algébriques*, tout comme le métier à tisser de Jacquard tisse des fleurs et des feuilles.» Les cartes constituent une solution particulièrement ingénieuse pour tisser des étoffes, ou pour exécuter des calculs, car elles permettent d'engendrer automatiquement n'importe quel motif ou équation.

Ada affine ensuite les descriptions de Menabrea et décrit en détail les

Les nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli apparaissent quand on développe des fonctions trigonométriques en séries polynomiales. Ce sont les valeurs B_n dans le développement polynomial de l'expression :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Pour son programme, Ada avait simplifié cette expression en :

$$0 = -\frac{1(2x-1)}{2(2x+1)} + B_1 \frac{2x}{2!} + B_2 \frac{(2x)(2x-1)(2x-2)}{4!} + B_3 \frac{(2x)(2x-1)(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{6!} + \dots + B_n \frac{(2x)(2x-1) \dots (2x-2n+2)}{(2n)!}$$

Pour calculer B_n à partir de cette expression, commençons par donner à x la valeur 1. La fraction $2x/2!$ associée à B_1 est alors égale à 1 et les fractions associées $B_2, B_3, \dots$ sont toutes égales à 0, car chaque numérateur contient le facteur $(2x-2)$, qui s'annule pour $x=1$. On obtient :

$$0 = \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + B_1$$

Soit $B_1 = 1/6$. Si nous fixons maintenant x égal à 2, les fractions associées à $B_3, B_4, \dots$ s'annulent, car leur numérateur contient le facteur $(2x-4)$. On obtient :

$$0 = \left(-\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) + (B_1 \times 2) + B_2$$

Connaissant la valeur de B_1 , on calcule $B_2 = -1/30$. Ainsi, de proche en proche, on calcule les nombres de Bernoulli, dont les cinq premiers sont $1/6, -1/30, 1/42, -1/30$ et $5/66$.

Pour diverses raisons, les indices qu'Ada a utilisés dans son programme étaient tous des nombres impairs : $B_1, B_3, B_5, \dots$, et non $B_1, B_2, B_3, \dots$. Le calcul successif de chacun des nombres de Bernoulli s'effectue dans ce que les informaticiens modernes nomment une boucle. Pour calculer les valeurs des fractions associées à chaque nombre de Bernoulli, Ada utilise une seconde boucle. Elle commence par diviser le premier facteur du numérateur par le premier facteur du dénominateur et elle met cette valeur en mémoire. Elle divise ensuite le second facteur du numérateur par le second facteur du dénominateur et multiplie la valeur obtenue par la valeur précédemment mise en mémoire. Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que la valeur de la fraction soit entièrement calculée, stade auquel elle est multipliée par le nombre de Bernoulli approprié.