

une série d'équations polynomiales (comme $0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$).

Cependant, Babbage a réfléchi à un système plus ambitieux. Devenu l'ami d'Ada, il lui décrit les principes d'une nouvelle machine, la Machine analytique, beaucoup plus élaborée que la Machine à différences. Il passera les 38 années restantes de sa vie à en perfectionner les plans.

La collaboration avec Babbage

Babbage conçoit sa Machine analytique de sorte qu'elle puisse résoudre n'importe quel problème arithmétique ;

l'architecture qu'il envisage ressemble beaucoup à celle des ordinateurs d'aujourd'hui, avec un «magasin» (une mémoire), un «moulin» (un processeur) et un lecteur de cartes perforées (une unité d'entrée). Babbage a pris l'idée des cartes perforées au métier à tisser de Jacquard, qui tisse des motifs automatiquement à l'aide de telles cartes. En sortie, la machine doit produire une page imprimée ou des cartes perforées. La Machine analytique doit effectuer des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions ; elle doit exécuter ou répéter un ensemble d'instructions fondées sur certaines conditions («si

x , alors y »), un concept fondamental de l'informatique nommé *branchement conditionnel*.

En 1840, Babbage fait sa première et unique présentation de la Machine analytique à un groupe de mathématiciens et d'ingénieurs à Turin. Parmi eux se trouve Luigi Federico Menabrea, un jeune mathématicien, qui deviendra premier ministre d'Italie. Très intéressé, celui-ci publie un article en français intitulé *Notions sur la Machine analytique de Charles Babbage*.

L'article de Menabrea traite plutôt des principes mathématiques de la Machine à différences et de la Machine analytique que des opérations mécaniques sous-jacentes. Attentif à l'architecture de l'appareil, il reconnaît que la Machine analytique serait capable de calculer toute formule algébrique correctement exprimée (ou programmée) sur les cartes perforées. Menabrea écrit : «Les cartes sont une simple traduction de formules algébriques, ou, pour être plus exact, une autre forme de notation analytique.»

Ada, qui a épousé William King, comte de Lovelace, lit l'article de Menabrea et commence à le traduire en anglais. Babbage est resté un bon ami et, ayant entendu parler de ses travaux au début de 1843, l'encourage à annoter la traduction.

Cette suggestion marque le début d'une collaboration qui mène à la publication par Ada du premier article traitant dans le détail de la programmation d'un calculateur ; ce sera le seul article de ce genre pour près d'un siècle. L'article, augmenté de sept notes (de A à G), est trois fois plus long que l'article initial de Menabrea. Ces notes sont en grande partie consacrées à la programmation de la Machine analytique à l'aide des cartes perforées de Jacquard : «La Machine analytique se distingue par l'application du principe que Jacquard a conçu pour régler, à l'aide de cartes perforées, les motifs les plus compliqués dans la fabrication de brocards. Nous disons, fort à propos, que la Machine analytique *tisse des motifs algébriques*, tout comme le métier à tisser de Jacquard tisse des fleurs et des feuilles.» Les cartes constituent une solution particulièrement ingénieuse pour tisser des étoffes, ou pour exécuter des calculs, car elles permettent d'engendrer automatiquement n'importe quel motif ou équation.

Ada affine ensuite les descriptions de Menabrea et décrit en détail les

Les nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli apparaissent quand on développe des fonctions trigonométriques en séries polynomiales. Ce sont les valeurs B_n dans le développement polynomial de l'expression :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Pour son programme, Ada avait simplifié cette expression en :

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1(2x-1)}{2(2x+1)} + B_1 \frac{2x}{2!} + B_2 \frac{(2x)(2x-1)(2x-2)}{4!} + \\ & B_3 \frac{(2x)(2x-1)(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{6!} + \\ & \dots + B_n \frac{(2x)(2x-1) \dots (2x-2n+2)}{(2n)!} \end{aligned}$$

Pour calculer B_n à partir de cette expression, commençons par donner à x la valeur 1. La fraction $2x/2!$ associée à B_1 est alors égale à 1 et les fractions associées $B_2, B_3, \dots$ sont toutes égales à 0, car chaque numérateur contient le facteur $(2x-2)$, qui s'annule pour $x = 1$. On obtient :

$$0 = \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + B_1$$

Soit $B_1 = 1/6$. Si nous fixons maintenant x égal à 2, les fractions associées à $B_3, B_4, \dots$ s'annulent, car leur numérateur contient le facteur $(2x-4)$. On obtient :

$$0 = \left(-\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) + (B_1 \times 2) + B_2$$

Connaissant la valeur de B_1 , on calcule $B_2 = -1/30$. Ainsi, de proche en proche, on calcule les nombres de Bernoulli, dont les cinq premiers sont $1/6, -1/30, 1/42, -1/30$ et $5/66$.

Pour diverses raisons, les indices qu'Ada a utilisés dans son programme étaient tous des nombres impairs : $B_1, B_3, B_5, \dots$, et non $B_1, B_2, B_3, \dots$. Le calcul successif de chacun des nombres de Bernoulli s'effectue dans ce que les informaticiens modernes nomment une boucle. Pour calculer les valeurs des fractions associées à chaque nombre de Bernoulli, Ada utilise une seconde boucle. Elle commence par diviser le premier facteur du numérateur par le premier facteur du dénominateur et elle met cette valeur en mémoire. Elle divise ensuite le second facteur du numérateur par le second facteur du dénominateur et multiplie la valeur obtenue par la valeur précédemment mise en mémoire. Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que la valeur de la fraction soit entièrement calculée, stade auquel elle est multipliée par le nombre de Bernoulli approprié.

particularités de programmation de la Machine analytique. Par exemple, elle souligne que la machine peut sélectionner les instructions selon certaines conditions, et elle distingue ce qui est théoriquement calculable de ce qui l'est en pratique. Elle analyse également les avantages que représente la réutilisation possible du programme par la Machine analytique.

Enfin, Ada montre le ridicule de la notion de «machine pensante» par

analogie avec la pensée humaine : «La Machine analytique n'a aucune prétention de créer quoi que ce soit, elle peut exécuter tout ce que nous savons ordonner pour la faire fonctionner.» Plus d'un siècle après, lors d'une conférence sur l'intelligence artificielle, Alan Turing nommera cette idée l'«Objection de lady Lovelace».

Le reste des notes est consacré aux principes de programmation de la Machine analytique ; il comprend

une description du mécanisme des cartes perforées et de la notation utilisée pour écrire les programmes. Une notation rigoureuse s'impose pour exprimer la formule algébrique sur les cartes perforées. Babbage avait adopté l'usage de tableaux, mais Ada fait une proposition différente.

Ada termine ses notes par un programme de calcul des nombres de Bernoulli. Le mathématicien suisse Jacques Bernoulli avait décrit ces nombres dans

Ada calcule les nombres de Bernoulli

Le schéma ci-dessous est le programme avec lequel Ada calculait B_7 , le quatrième nombre de Bernoulli. Les six premières colonnes montrent les différentes opérations que réaliserait la Machine analytique, et les autres colonnes représentent les valeurs de chacune des variables. Chaque ligne correspond à une opération.

Lorsque le programme commence, il utilise six variables : V_1 , V_2 , V_3 , V_{21} , V_{22} et V_{23} (cases foncées de la barre supérieure) ; les exposants, à gauche de ces nombres, indiquent le nombre de fois où la variable a été utilisée. Les valeurs de ces variables sont 1, 2, n (qui, dans ce cas, est 4, car Ada calcule B_7 , le quatrième nombre de Bernoulli), B_1 , B_3 et B_5 . V_{10} est utilisé pour mettre en mémoire le nombre d'itérations restant à exécuter. À la première itération, V_{10} est égal à $n - 1$, à la seconde itération, V_{10} est égal à $n - 2$, et ainsi de suite. Lorsque V_{10} est égal à 1, la boucle s'arrête, et le programme a fini de calculer les nombres de Bernoulli.

Les six premières opérations calculent $(1/2) \times (2n - 1)/(2n + 1)$ et mettent la valeur en mémoire dans V_{13} . L'opération 7 soustrait 1 de n et l'assigne à V_{10} , car la première itération est terminée. Les opérations 8, 9 et 10 calculent $2n/2$ et le multiplient par B_1 , qui a été calculé précédemment et mis en mémoire dans V_{21} ; elles mettent la valeur en mémoire dans V_{12} . L'opération 11 prend V_{12} et l'ajoute à V_{13} , et l'opération 12 soustrait 2 de n et met cette valeur en mémoire dans V_{10} , car la seconde itération est terminée. Les opérations 13 à 21 calculent la valeur suivante et la multiplient par B_5 .

Le programme d'Ada est critiquable, car elle n'utilise pas de variable pour conserver la trace de chaque itération pendant le calcul des valeurs fractionnaires, comme elle le fait pour V_{10} lorsqu'elle calcule le produit des fractions par les précédents nombres de Bernoulli. On note également une erreur, dans le programme d'Ada, dans l'opération 21, où le troisième facteur du dénominateur devrait être 4 et non 3.

Diagram for the computation by the Engine of the Numbers of Bernoulli. See Note G. (page 722 et seq.)

Number of Operation.	Nature of Operation.	Variables acted upon.	Variables receiving results.	Indication of change in the value on any Variable.	Statement of Results.	Working Variables.												Result Variables.			
						V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{21}	V_{22}	V_{23}
						1	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	B_1 in a decimal fraction.	B_3 in a decimal fraction.	B_5 in a decimal fraction.
1	$\times$	$V_2 \times V_4$	V_6	$V_6 = V_6$	$-2n$	...	2	n	2n	2n	2n										
2	$-$	$V_4 - V_1$	V_6	$V_6 = V_6$	$-2n - 1$	1	...	...	$2n - 1$												
3	$+$	$V_6 + V_1$	V_6	$V_6 = V_6$	$-2n + 1$	1	...	...	$2n + 1$												
4	$+$	$V_6 + V_4$	V_{11}	$V_{11} = V_6$	$2n - 1$	...	...	...	0	0	...	...	...	...			$\frac{2n-1}{2n+1}$				
5	$+$	$V_{11} + V_6$	V_{11}	$V_{11} = V_{11}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$	...	2	...	...	...	...	...	...	...			$\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$				
6	$-$	$V_{11} - V_{11}$	V_{13}	$V_{13} = V_{11}$	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$	...	...	...	...	...	...	...	...	...			0				
7	$-$	$V_3 - V_1$	V_{10}	$V_{10} = V_3$	$n - 1 (= 3)$	1	...	n	...	...	...	...	...	...	n - 1			$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$			
8	$+$	$V_2 + V_7$	V_7	$V_7 = V_2$	$-2 + 0 = 2$	...	2	...	...	...	...	2									
9	$+$	$V_6 + V_7$	V_{11}	$V_{11} = V_6$	$-2n = A_1$	...	...	...	...	...	2n	2					$\frac{2n}{2} = A_1$				
10	$\times$	$V_{11} \times V_{11}$	V_{12}	$V_{12} = V_{11}$	$-B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$	...	...	...	...	...	...	...					$\frac{2n}{2} = A_1$				
11	$+$	$V_{12} + V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12}$	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2}$	...	...	...	...	...	...	...					$B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$				
12	$-$	$V_{10} - V_1$	V_{10}	$V_{10} = V_1$	$n - 2 (= 2)$	1	...	...	...	...	...	...			n - 2		0		$\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2} \right\}$		
13	$-$	$V_6 - V_1$	V_6	$V_6 = V_6$	$-2n - 1$	1	...	...	...	...	2n - 1										
14	$+$	$V_1 + V_7$	V_7	$V_7 = V_1$	$-2 + 1 = 3$	1	...	...	...	...	3										
15	$+$	$V_6 + V_7$	V_6	$V_6 = V_6$	$2n - 1$	...	...	...	...	...	2n - 1	3					$\frac{2n-1}{3}$				
16	$\times$	$V_6 \times V_{11}$	V_{11}	$V_{11} = V_6$	$\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$	...	...	...	...	...	...	...					$\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$				
17	$+$	$V_6 + V_7$	V_6	$V_6 = V_6$	$-2n - 2$	1	...	...	...	...	2n - 2										
18	$+$	$V_1 + V_7$	V_7	$V_7 = V_1$	$-3 + 1 = 4$	1	...	...	...	...	4										
19	$+$	$V_6 + V_7$	V_6	$V_6 = V_6$	$2n - 2$	...	...	...	...	...	2n - 2	4					$\frac{2n-2}{4}$				
20	$\times$	$V_6 \times V_{11}$	V_{11}	$V_{11} = V_6$	$-\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} = A_2$	...	...	...	...	...	...	...					$\left\{ \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} - \frac{2n-2}{4} \right\}$				
21	$\times$	$V_{22} \times V_{11}$	V_{11}	$V_{11} = V_{22}$	$-B_3 \cdot \frac{2n-1}{3} = B_3 A_2$	...	...	...	...	...	...	...					0		$B_3 A_2$		
22	$+$	$V_{12} + V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12}$	$A_0 + B_1 A_1 + B_3 A_2$	...	...	...	...	...	...	...									
23	$-$	$V_{10} - V_1$	V_{10}	$V_{10} = V_1$	$n - 3 (= 1)$	1	...	...	...	...	...	...			n - 3				$\{ A_2 + B_1 A_1 + B_3 A_2 \}$		
Here follows a repetition of Operations thirteen to twenty-three.																					
24	$+$	$V_{13} + V_{13}$	V_{24}	$V_{24} = V_{13}$	B_7	...	...	...	...	...	...	...									
25	$+$	$V_1 + V_7$	V_7	$V_7 = V_1$	$n + 1 = 4 + 1 = 5$	1	...	n + 1	...	...	0	0									