



Grilles toriques et fabrique de briques

IAN STEWART

Ou comment éviter les déraillements de wagonnets devient un problème ardu de mathématicien.

Les mathématiques fascinent, notamment parce qu'elles sont pleines de surprises. Ainsi, des problèmes d'énoncés simples résistent parfois pendant des siècles aux plus brillantes intelligences. Le dernier théorème de Fermat (voir *Fermat enfin démontré*, par Yves Hellegouarch, *Pour la Science*, février 1996), le problème de Kepler (voir *La conjecture de Kepler démontrée*, par Christoph Pöppe, *Pour la Science*, mai 1999) ou le théorème des quatre couleurs sont de beaux exemples de problèmes qui ont été résolus ces dernières années, alors que leurs énoncés dataient de plus d'un siècle.

Le problème des quatre couleurs a intéressé de nombreux mathématiciens, notamment les amateurs de jeux mathématiques, mais sa démonstration en a frustré plus d'un, car, avec elle, une source inépuisable d'amusements disparaissait. Reste-t-il aujourd'hui des problèmes amusants à la portée des amateurs ? Une foule !

Le problème des quatre couleurs, apparu il y a 150 ans, était de savoir

combien de couleurs suffisent pour colorier les pays de n'importe quelle carte dessinée sur un plan de sorte que deux pays adjacents n'ont jamais la même couleur. Utilisant l'informatique, Kenneth Appel et Wolfgang Haken, de l'Université de l'Illinois, ont démontré en 1976 que ce nombre est quatre.

Le théorème des quatre couleurs appartient à la branche mathématique de la théorie des graphes. Un graphe est un ensemble de sommets (représentés par des points) joints par des arêtes. On représente une carte bidimensionnelle par un graphe en attribuant un sommet à chaque pays et en reliant deux sommets quand les pays correspondants sont adjacents. Ainsi, le problème des quatre couleurs devient un problème de coloriage des sommets du graphe associé à la carte.

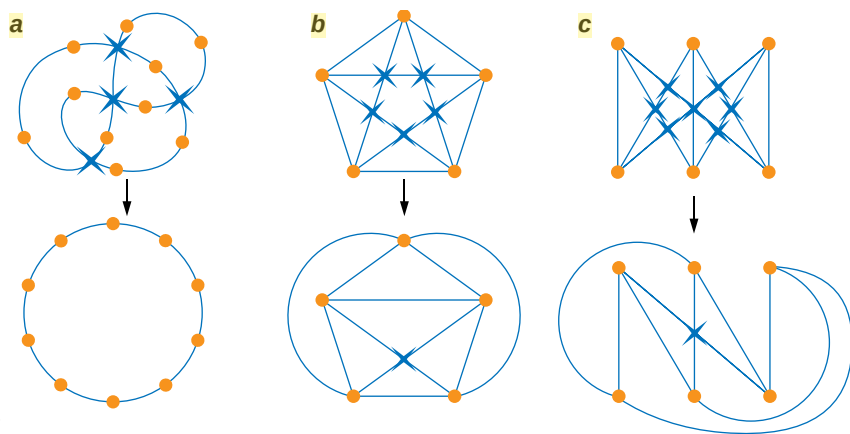
La théorie des graphes est une source de nombreux problèmes aussi faciles à énoncer que difficiles à résoudre. Tels sont les problèmes de croisements des arêtes d'un graphe, c'est-à-dire la recherche du nombre

minimal de croisements d'arêtes quand les sommets sont fixés (les arêtes ne se coupent que deux à deux ; les intersections de trois arêtes sont interdites). En 1970, les mathématiciens Paul Erdős et Richard Guy ont signalé que la plupart des problèmes de croisements étaient non résolus ; la situation n'a pas changé. On démontre très difficilement les conjectures, dans ce domaine, mais les amateurs de jeux mathématiques peuvent s'amuser beaucoup en considérant des graphes particuliers et en cherchant le nombre minimal de croisements d'arêtes. Ces tentatives infirmeront-elles certaines conjectures ?

Les graphes sans croisements sont complètement décrits par le théorème démontré en 1930 par le mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski. De tels graphes, où deux arêtes ne se rencontrent qu'à un sommet, sont planaires. Le premier graphe de la figure 1 est composé de dix sommets, que relie dix arêtes. Les quatre croisements présents (croix bleues) disparaissent quand on déplace les sommets : on obtient un cycle à dix sommets, que l'on note C_{10} . Les graphes similaires à n sommets sont notés C_n .

Le deuxième graphe de la figure est dit complet, car chacun de ses cinq sommets est relié aux quatre autres. Il est noté K_5 , et les graphes analogues à n sommets sont notés K_n . Quel que soit le réarrangement de ses lignes, le nombre minimal de croisements d'un graphe K_5 est 1 : le graphe K_5 n'est pas planaire.

Le troisième exemple est un graphe biparti complet, c'est-à-dire que les sommets se répartissent en deux ensembles et que chacun des sommets d'un ensemble est relié à tous les sommets de l'autre ensemble. Ici, chaque ensemble contient trois sommets. Le graphe est noté $K_{3,3}$ et son nombre minimal de croisement est également 1. Il est équivalent au vieux problème où l'on veut relier trois maisons à des sources d'ap-



1. La recherche du nombre minimal de croisements pour les graphes est un problème d'énoncé simple, mais de démonstration très difficile. Un graphe planaire (a) peut être réarrangé de sorte que tous les croisements d'arêtes disparaissent. Le nombre minimal de croisements pour un graphe complet à cinq sommets (b) et pour un graphe à bipartition complète avec deux ensembles de trois sommets (c) est égal à 1.

provisionnement en eau, en gaz et en électricité sans que les tubulures ne se croisent. Le problème est impossible. Lorsque les deux ensembles ont m et n sommets, le graphe est noté $K_{m,n}$.

L'idée de nombre minimal de croisements est apparue en 1944, lorsque le mathématicien hongrois Paul Turán travaillait dans une fabrique de briques, près de Budapest. L'usine contenait des fours, qui cuisaient les briques, et des dépôts, où les briques étaient entreposées. Les ouvriers transportaient les briques dans des wagonnets qu'ils poussaient sur un réseau de voies ferrées qui reliaient chaque four à chaque dépôt. Cependant, aux croisements, les wagonnets risquaient de dérailler, ce qui brisait les briques !

Alors qu'un ingénieur aurait amélioré les aiguillages, Turán chercha à minimiser leur nombre. Il élimina rapidement les croisements superflus, mais le problème général continua de l'intriguer. Avec m fours reliés chacun à n dépôts, le problème est le suivant : pour tout graphe biparti complet $K_{m,n}$, quel est le nombre minimal de croisements ?

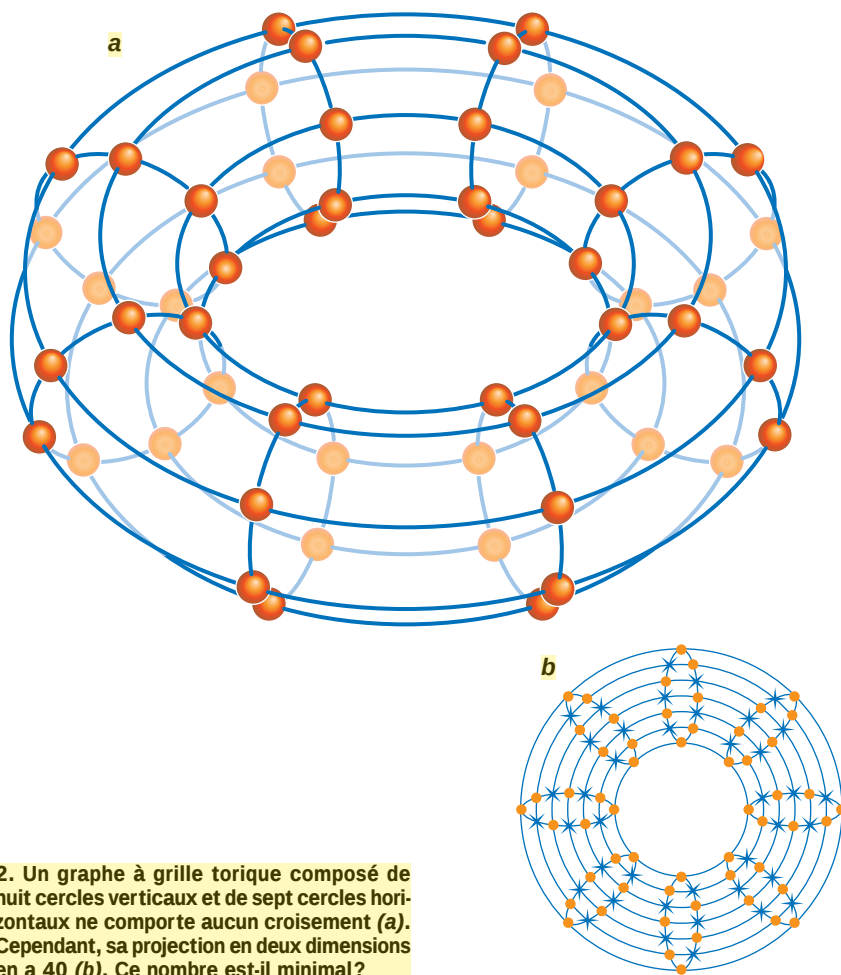
Le problème reste ouvert. Nadine Myers, de l'Université Hamline, a récemment montré que le nombre minimal de croisements n'est connu que pour les graphes complets K_n avec $n < 11$, et pour les graphes bipartis complets $K_{m,n}$ avec $2 < m < 7$.

Une grille torique à maille rectangulaire représentée sur la figure 2 est un autre type de graphe, qui pose également des problèmes intéressants. Il est composé de deux familles de cercles : huit cercles verticaux passant par sept sommets (notés C_7) et sept cercles horizontaux passant par huit sommets (notés C_8). L'association de ces cercles forme un tore – une surface en forme de chambre à air – où les arêtes ne se croisent qu'aux sommets. Lorsque ce graphe ($C_7 \times C_8$) est écrasé sur un plan, chaque cercle vertical, devenu une ellipse, croise les cercles horizontaux en cinq points. Les arêtes du graphe se croisent donc, au total, 40 fois.

Généralisons avec m cercles horizontaux et n cercles verticaux (par convention, $m \leq n$). Les projections sur un plan de chaque cercle vertical coupent une fois, en un sommet du graphe, les cercles horizontaux extrêmes et deux fois chacun des $(m-2)$ autres cercles horizontaux, dont une fois en un sommet. Ainsi chaque cercle vertical contribue pour $(m-2)$ croisements, et le graphe complet a $n(m-2)$ croisements. Ce nombre $n(m-2)$ est-il le nombre minimal de croisements

pour un graphe en grille torique ? Cette «conjecture (m, n) » n'a jamais été prouvée. Elle est vérifiée pour $2 < m < 7$ et pour $m = n = 7$. Pour le graphe $C_7 \times C_8$, on suppose que le nombre minimal de croisements est égal à 40, mais cette conjecture n'a jamais été démontrée. Si vous parvenez à redessiner l'illustration avec seulement 39 croisements, voire moins, vous infirmerez cette conjecture.

En 1997, à l'Université Carleton, Gelasio Salazar a démontré que, si le nombre de croisements d'un graphe ($C_m \times C_n$) est inférieur à $n(m-2)$, il ne l'est que de peu. Toutefois, un nombre minimal de croisements peu inférieur à 40 reste possible. La conjecture (m, n) est-elle fausse, ce qui expliquerait qu'on ne puisse la démontrer ? Ou bien est-elle aussi ardue que ses nobles consœurs, les conjectures de Fermat, de Kepler et des quatre couleurs ?



2. Un graphe à grille torique composé de huit cercles verticaux et de sept cercles horizontaux ne comporte aucun croisement (a). Cependant, sa projection en deux dimensions en a 40 (b). Ce nombre est-il minimal ?

Bryan Christie

Réactions

Dans la «conjecture du soufflet» (voir *Pour la Science*, août 1998), j'expliquais pourquoi il est impossible de construire un soufflet polyédrique, c'est-à-dire un polyèdre flexible qui change de volume en se déformant. Un point important concernait la parfaite impossibilité d'une face à se déformer et de deux faces en contact à se séparer. Cependant, le carton n'est pas absolument rigide. Un soufflet polyédrique à volume variable en carton est donc possible, car ses faces se déforment et ses arêtes se fendent.

David Briggs, à Waltrop (Allemagne), a breveté un ingénieux système de soufflet, utilisable par exemple en milieu hospitalier pour des poches à transfusion. Vous le trouverez sur le site Internet :

http://www.patents.ibm.com/details?pn=US03993222__&language=en. Selon l'inventeur, l'idée vient de son père qui lui a appris à faire rentrer dans le tube le dentifrice qui est sorti en trop : il suffit de presser le tube perpendiculairement à la première pression.