

provisionnement en eau, en gaz et en électricité sans que les tubulures ne se croisent. Le problème est impossible. Lorsque les deux ensembles ont m et n sommets, le graphe est noté $K_{m,n}$.

L'idée de nombre minimal de croisements est apparue en 1944, lorsque le mathématicien hongrois Paul Turán travaillait dans une fabrique de briques, près de Budapest. L'usine contenait des fours, qui cuisaient les briques, et des dépôts, où les briques étaient entreposées. Les ouvriers transportaient les briques dans des wagonnets qu'ils poussaient sur un réseau de voies ferrées qui reliaient chaque four à chaque dépôt. Cependant, aux croisements, les wagonnets risquaient de dérailler, ce qui brisait les briques !

Alors qu'un ingénieur aurait amélioré les aiguillages, Turán chercha à minimiser leur nombre. Il élimina rapidement les croisements superflus, mais le problème général continua de l'intriguer. Avec m fours reliés chacun à n dépôts, le problème est le suivant : pour tout graphe biparti complet $K_{m,n}$, quel est le nombre minimal de croisements ?

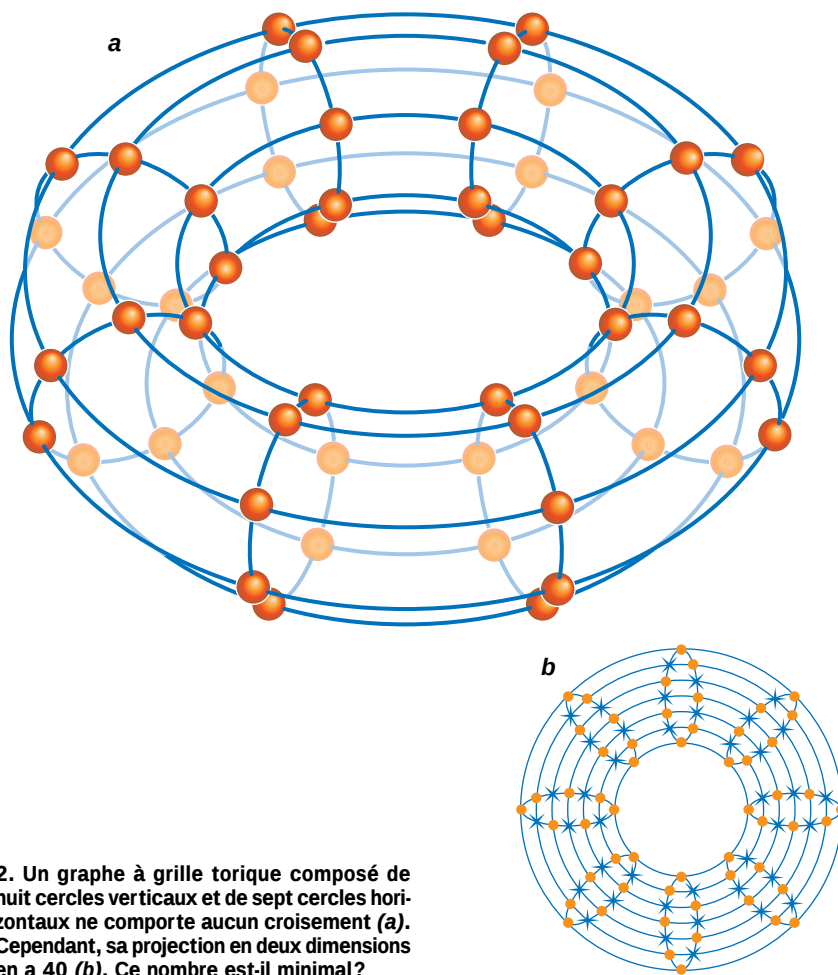
Le problème reste ouvert. Nadine Myers, de l'Université Hamline, a récemment montré que le nombre minimal de croisements n'est connu que pour les graphes complets K_n avec $n < 11$, et pour les graphes bipartis complets $K_{m,n}$ avec $2 < m < 7$.

La grille torique à maille rectangulaire représentée sur la figure 2 est un autre type de graphe, qui pose également des problèmes intéressants. Il est composé de deux familles de cercles : huit cercles verticaux passant par sept sommets (notés C_7) et sept cercles horizontaux passant par huit sommets (notés C_8). L'association de ces cercles forme un tore – une surface en forme de chambre à air – où les arêtes ne se croisent qu'aux sommets. Lorsque ce graphe ($C_7 \times C_8$) est écrasé sur un plan, chaque cercle vertical, devenu une ellipse, croise les cercles horizontaux en cinq points. Les arêtes du graphe se croisent donc, au total, 40 fois.

Généralisons avec m cercles horizontaux et n cercles verticaux (par convention, $m \leq n$). Les projections sur un plan de chaque cercle vertical coupent une fois, en un sommet du graphe, les cercles horizontaux extrêmes et deux fois chacun des $(m-2)$ autres cercles horizontaux, dont une fois en un sommet. Ainsi chaque cercle vertical contribue pour $(m-2)$ croisements, et le graphe complet a $n(m-2)$ croisements. Ce nombre $n(m-2)$ est-il le nombre minimal de croisements

pour un graphe en grille torique ? Cette «conjecture (m, n) » n'a jamais été prouvée. Elle est vérifiée pour $2 < m < 7$ et pour $m = n = 7$. Pour le graphe $C_7 \times C_8$, on suppose que le nombre minimal de croisements est égal à 40, mais cette conjecture n'a jamais été démontrée. Si vous parvenez à redessiner l'illustration avec seulement 39 croisements, voire moins, vous infirmerez cette conjecture.

En 1997, à l'Université Carleton, Gelasio Salazar a démontré que, si le nombre de croisements d'un graphe ($C_m \times C_n$) est inférieur à $n(m-2)$, il ne l'est que de peu. Toutefois, un nombre minimal de croisements peu inférieur à 40 reste possible. La conjecture (m, n) est-elle fausse, ce qui expliquerait qu'on ne puisse la démontrer ? Ou bien est-elle aussi ardue que ses nobles consœurs, les conjectures de Fermat, de Kepler et des quatre couleurs ?



2. Un graphe à grille torique composé de huit cercles verticaux et de sept cercles horizontaux ne comporte aucun croisement (a). Cependant, sa projection en deux dimensions en a 40 (b). Ce nombre est-il minimal ?

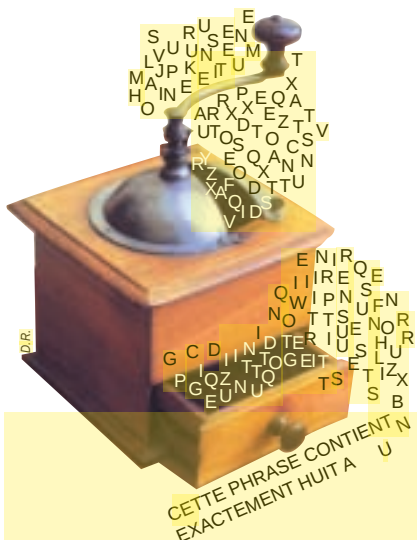
Bryan Christie

Réactions

Dans la «conjecture du soufflet» (voir *Pour la Science*, août 1998), j'expliquais pourquoi il est impossible de construire un soufflet polyédrique, c'est-à-dire un polyèdre flexible qui change de volume en se déformant. Un point important concernait la parfaite impossibilité d'une face à se déformer et de deux faces en contact à se séparer. Cependant, le carton n'est pas absolument rigide. Un soufflet polyédrique à volume variable en carton est donc possible, car ses faces se déforment et ses arêtes se fendent.

David Briggs, à Waltrop (Allemagne), a breveté un ingénieux système de soufflet, utilisable par exemple en milieu hospitalier pour des poches à transfusion. Vous le trouverez sur le site Internet :

http://www.patents.ibm.com/details?pn=US03993222__&language=en. Selon l'inventeur, l'idée vient de son père qui lui a appris à faire rentrer dans le tube le dentifrice qui est sorti en trop : il suffit de presser le tube perpendiculairement à la première pression.



Cette phrase contient exactement...

...huit a, un b, six c, cinq d, vingt-trois e, deux f, trois g, quatre h, dix-sept i, un j, un k, deux l, trois m, seize n, huit o, cinq p, sept q, dix r, onze s, vingt-quatre t, quatorze u, trois v, un w, sept x, un y et, finalement, quatre z.

JACQUES PITRAT

La phrase qui sert de titre et de chapeau à cet article décrit son propre contenu. Il y a bien huit a, un b, etc., et toutes les lettres de l'alphabet sont dénombrées. On trouve assez facilement de telles phrases, nommées phrases réflexives, quand elles ne décrivent qu'une partie de leur contenu, comme : « Cette phrase contient exactement cinq n et trois o. » L'utilisation d'un ordinateur facilite la découverte de phrases qui décrivent combien de fois elles contiennent chacune des 26 lettres de l'alphabet. Cette recherche a un parfum de rhétorique et devrait plaire au cercle de l'Oulipo.

Lorsque nous cherchons une phrase de ce type, le moindre changement a

de fâcheuses répercussions, car il modifie ce qui était correct auparavant. Si, par exemple, une phrase énonce qu'elle contient sept p alors qu'elle en contient en réalité huit, et que nous changeons le « sept » lié à p en « huit », nous modifions ce faisant le nombre de s, de e, de p, de h, de u et de i. Seul le nombre de t ne change pas, car il y en a un dans huit et un dans sept. En outre, nous n'avons toujours pas le bon nombre de p : la phrase énonce maintenant qu'elle contient huit p alors qu'elle n'en contient plus que sept !

Même la vérification de l'exactitude d'une solution est longue, et l'on s'y trompe souvent. Ainsi, la phrase suivante

est à la fois correcte et fautive : « Il est facile de voir que cette phrase contient six a, un b, sept c, quatre d, dix-huit e, quatre f, cinq g, cinq h, vingt-deux i, un j, un k, trois l, un m, vingt et un n, cinq o, quatre p, huit q, neuf r, huit s, vingt et un t, vingt u, six v, un w, six x, un y et pour finir un z. » Elle indique des nombres de lettres exacts, mais il n'est pas si facile d'en faire la vérification.

LE CORPS ET LES PARTIES, FIXES ET MOBILES

Pour faciliter la découverte des phrases réflexives à la main ou par l'informatique, nous allons séparer les lettres en plusieurs groupes, certains variant au cours de la recherche et d'autres non. On appelle « corps » d'une phrase réflexive l'ensemble de ses lettres qui ne sont pas dans les nombres associés aux lettres de l'alphabet. On le choisit au départ. Le corps de la phrase du titre et du chapeau est : *cettephrasecontientexactementabcdefghijklmnopqrstuvwxyzetfinale-*

La partie « fixe » de la phrase contient le corps auquel on ajoute les lettres des nombres associés aux lettres qui n'apparaissent dans aucun nombre : en français, b, j, k, w et y, auxquelles nous pouvons ajouter l et m qui n'apparaissent que dans mille, million et milliard, que l'on a peu de chances de rencontrer comme nombre de lettres dans une phrase normale. Les nombres associés à ces lettres ne varient pas quand on change un nombre associé à une lettre : la partie fixe de la phrase est entièrement déterminée par le choix du corps. Pour la phrase du titre et du chapeau, la partie fixe est : *cettephrasecontientexactementaunbcdefghijklmdeuxltroismnopqrstuvunwxnyetfinale-*

