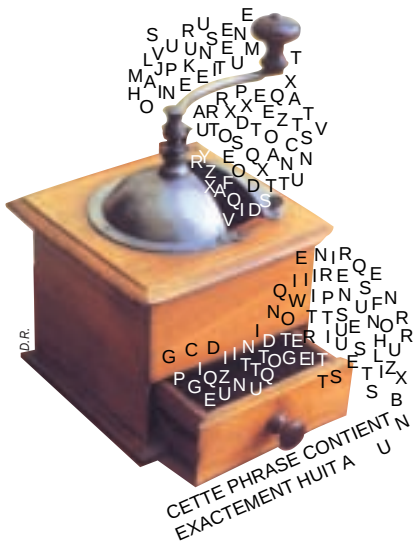




Cette phrase contient exactement...

...huit a, un b, six c, cinq d, vingt-trois e, deux f, trois g, quatre h, dix-sept i, un j, un k, deux l, trois m, seize n, huit o, cinq p, sept q, dix r, onze s, vingt-quatre t, quatorze u, trois v, un w, sept x, un y et, finalement, quatre z.

JACQUES PITRAT

La phrase qui sert de titre et de chapeau à cet article décrit son propre contenu. Il y a bien huit a, un b, etc., et toutes les lettres de l'alphabet sont dénombrées. On trouve assez facilement de telles phrases, nommées phrases réflexives, quand elles ne décrivent qu'une partie de leur contenu, comme : « Cette phrase contient exactement cinq n et trois o. » L'utilisation d'un ordinateur facilite la découverte de phrases qui décrivent combien de fois elles contiennent chacune des 26 lettres de l'alphabet. Cette recherche a un parfum de rhétorique et devrait plaire au cercle de l'Oulipo.

Lorsque nous cherchons une phrase de ce type, le moindre changement a

de fâcheuses répercussions, car il modifie ce qui était correct auparavant. Si, par exemple, une phrase énonce qu'elle contient sept p alors qu'elle en contient en réalité huit, et que nous changeons le « sept » lié à p en « huit », nous modifions ce faisant le nombre de s, de e, de p, de h, de u et de i. Seul le nombre de t ne change pas, car il y en a un dans huit et un dans sept. En outre, nous n'avons toujours pas le bon nombre de p : la phrase énonce maintenant qu'elle contient huit p alors qu'elle n'en contient plus que sept !

Même la vérification de l'exactitude d'une solution est longue, et l'on s'y trompe souvent. Ainsi, la phrase suivante

est à la fois correcte et fautive : « Il est facile de voir que cette phrase contient six a, un b, sept c, quatre d, dix-huit e, quatre f, cinq g, cinq h, vingt-deux i, un j, un k, trois l, un m, vingt et un n, cinq o, quatre p, huit q, neuf r, huit s, vingt et un t, vingt u, six v, un w, six x, un y et pour finir un z. » Elle indique des nombres de lettres exacts, mais il n'est pas si facile d'en faire la vérification.

LE CORPS ET LES PARTIES, FIXES ET MOBILES

Pour faciliter la découverte des phrases réflexives à la main ou par l'informatique, nous allons séparer les lettres en plusieurs groupes, certains variant au cours de la recherche et d'autres non. On appelle « corps » d'une phrase réflexive l'ensemble de ses lettres qui ne sont pas dans les nombres associés aux lettres de l'alphabet. On le choisit au départ. Le corps de la phrase du titre et du chapeau est : *cettephrasecontientexactementabcdefghijklmnopqrstuvwxyzetfinalementz*.

La partie « fixe » de la phrase contient le corps auquel on ajoute les lettres des nombres associés aux lettres qui n'apparaissent dans aucun nombre : en français, b, j, k, w et y, auxquelles nous pouvons ajouter l et m qui n'apparaissent que dans mille, million et milliard, que l'on a peu de chances de rencontrer comme nombre de lettres dans une phrase normale. Les nombres associés à ces lettres ne varient pas quand on change un nombre associé à une lettre : la partie fixe de la phrase est entièrement déterminée par le choix du corps. Pour la phrase du titre et du chapeau, la partie fixe est : *cettephrasecontientexactementaunbcdefghijklmdeuxltroismnopqrstuvunwxunyetfinalementz*.



La partie «mobile» de la phrase est formée des lettres des nombres associés aux lettres pouvant figurer dans des nombres. Le corps d'une phrase étant choisi, c'est cette partie mobile que nous recherchons pour écrire une phrase réflexive. Pour la phrase du titre et du chapeau, la partie mobile est : *huitsix-cinqvingttroisdeuxtroisquatredixsept-seizehuit-cinqseptdixonzevingtquatrequatorzetrouisseptquatre*.

Le problème a quelques variantes. Ainsi, en français, on peut considérer les caractères e, é, ê, ë et ù comme une seule lettre ou comme cinq lettres différentes. Le choix d'un classement ou d'un autre n'est toutefois pas très important : en français, aucun nombre ne contient de lettre accentuée, à l'exception de zéro, qui ne peut apparaître (si l'on indique que l'on a zéro fois une certaine lettre, cette lettre apparaît une fois, et le zéro disparaît!). Ainsi, la distinction des lettres accentuées alourdit seulement la partie fixe de la phrase avec des nombres qui ne changeront jamais.

La phrase peut aussi mentionner le nombre d'espaces, de signes de ponctuation, de traits d'union, voire le nombre total de ses lettres. Avec les signes de ponctuation, on augmente seulement la partie fixe de la phrase : leur quantité n'est pas modifiée quand on change les nombres. En revanche, compter les traits d'union ajoute des lettres à la partie mobile, car tous les nombres n'ont pas de trait d'union. De même si l'on compte les espaces : trente et un a deux espaces alors que d'autres nombres n'en ont aucun. Enfin, le nombre total de lettres change évidemment quand on modifie un nombre : pour les nombres inférieurs à 100, il va de 2 (un) à 19 (quatre-vingt-quatorze). Dans chacune de ces trois variantes, on augmente d'une unité la quantité de nombres à trouver pour définir une phrase, ce qui complique un peu le problème.

On peut aussi rechercher les phrases réflexives les plus concises possible : plutôt que d'indiquer qu'il y a, par exemple, «un k» ou «un w», on ne fait pas figurer ces lettres, qui n'apparaissent qu'à l'endroit de la phrase où l'on en mentionne le nombre. Il est difficile d'être plus concis que la phrase suivante : «Trois a, deux c, six d, dix e, deux h, huit i, deux n, trois o, quatre p, quatre q, cinq r, sept s, dix t, sept u et sept x.»

Enfin, en hommage à Georges Perec, voici une phrase réflexive qui ne contient pas de e. Elle est un peu alambiquée, car elle ne peut contenir que les nombres un, trois, cinq, six, huit, dix, dix-huit, vingt, vingt-trois, vingt-cinq, vingt-six et vingt-huit. Le nombre sans e suivant est un million ! «Ha, l'on trouva la solution ; il

Les éléments d'une phrase réflexive

On choisit d'abord le **corps** de la phrase, c'est à dire les lettres qui ne sont pas dans les nombres associés aux lettres :

cetitrecontientabcdefghijklmnopqrstuvwxyz

Puis on détermine la **partie fixe** de la phrase, le corps plus les lettres des nombres associés aux lettres qui n'apparaissent dans aucun nombre (b, j, k, l, m, w et y) :

cetitrecontientaunbcdefghiunjunkunlunmnopqrstuvunwxunyetz

Il ne reste qu'à déterminer la **partie mobile** de la phrase, les nombres associés aux lettres qui apparaissent dans les nombres :

Ce titre contient quatre a, un b, cinq c, cinq d, dix-neuf e, deux f, un g, deux h, treize i, un j, un k, un l, un m, seize n, trois o, quatre p, sept q, sept r, sept s, quinze t, dix-huit u, un v, un w, six x, un y et quatre z.

rit, titra tout, sans tri, sur un trait gras : cinq c, huit a, trois g, six d, vingt-cinq i, six h, dix n, cinq l, cinq q, huit o, dix s, dix r, dix u, dix-huit t, huit x, trois v».

DES CHIFFRES ET DES LETTRES

Comment écrire de telles phrases ? Pour un corps donné, on pourrait écrire toutes les phrases possibles en utilisant systématiquement tous les ensembles possibles de 26 nombres ; on vérifierait ensuite seulement si chacune de ces phrases décrit correctement son contenu. Cette méthode est toutefois inutilisable : le nombre de situations possibles est infini, et même en restreignant le choix aux nombres inférieurs à 30, par exemple, le plus puissant des ordinateurs n'en viendrait pas à bout en un temps raisonnable.

En français, on peut réduire le nombre de combinaisons : nous avons vu que seulement 19 lettres peuvent figurer dans un nombre. En outre, les lettres g et v apparaissent toujours ensemble, et seulement dans le nombre vingt, le nombre de g et de v qui apparaissent dans des nombres sont toujours les mêmes. Les nombres associés au g et au v figurent toutefois dans la partie mobile : ils peuvent tous les deux changer, bien que ces changements soient liés. Ainsi, un corps étant donné, nous n'avons que 18 nombres à déterminer. C'est encore trop.

Heureusement, Douglas Hofstadter, dans son livre *Ma Thémagie*, a décrit une méthode plus efficace pour créer des phrases réflexives. Pour chaque lettre de l'alphabet, on nomme «nombre réel» le nombre d'apparitions de cette lettre dans la phrase et «nombre affiché» celui qui, dans la phrase, est associé à cette lettre. Ainsi, dans «cette phrase contient quatre a», le nombre affiché pour a est quatre et le nombre réel est trois.

Le corps de la phrase étant choisi, on commence alors en tirant au sort les 26 nombres affichés que l'on cherche. Si, pour toutes les lettres, le nombre affiché est égal au nombre réel, on tient une solution. Si ce n'est pas le cas, on remplace pour chaque lettre son nombre affiché par son nombre réel, qui devient ainsi le nouveau nombre affiché. On poursuit le processus en vérifiant à chaque itération si les nombres affichés sont ou non égaux aux nombres réels.

Deux cas peuvent se produire : soit on arrive à une solution, soit on retrouve une situation déjà rencontrée et l'on tombe dans une boucle. On pourrait détecter les boucles en gardant les situations déjà rencontrées, mais cela obligerait à conserver en mémoire beaucoup trop de situations et nécessiterait un trop grand nombre de comparaisons. Il est plus simple de limiter le nombre d'itérations permises : si l'on dépasse cette limite, on arrête, on refait un tirage pour les nombres affichés et l'on recommence les itérations. On fixe aussi une limite au nombre de tirages de départ. Si on la dépasse, on arrête les essais pour ce corps. Ces nombres maximaux d'itérations et de points de départ ont une grande influence sur le succès de la méthode et sur le temps de calcul.

Pour un corps donné, il n'existe pas toujours une phrase réflexive, même dans le cas simple où l'on s'intéresse aux apparitions d'une seule lettre. Ainsi la phrase : «Cette courte phrase contient en tout six e» est incorrecte puisqu'elle contient sept e. Changeons alors le six en sept : «Cette courte phrase contient en tout sept e.» Cela ne va toujours pas puisqu'il y en a maintenant huit. Changeons le sept en huit : «Cette courte phrase contient en tout huit e.» Et nous revenons à sept e. Si l'on met neuf, on aura seulement huit e : il n'y a pas de solution.