

Les concepts et les méthodes introduits par Gödel sont au centre de la théorie de la récurrence, centrale en informatique. Ses idées sont à l'origine de nombreux résultats sur les limites des procédures informatiques, par exemple, sur le caractère indécidable de la durée d'exécution des programmes : pour une donnée d'entrée et un programme fixé, un ordinateur s'arrêtera-t-il finalement, en produisant une donnée de sortie, ou finira-t-il dans une boucle infinie ? De même, aucun programme ne peut détecter tous les programmes qui modifient le système d'exploitation d'un ordinateur (les virus, par exemple) sans modifier lui-même ce système.

LE REFUGE AUX ÉTATS-UNIS

Gödel passe l'année universitaire 1933-1934 à l'Institut des études avancées de Princeton, où il enseigne son théorème d'incomplétude. Une «dépression nerveuse» peu après son retour à Vienne

l'empêche d'y retourner l'année suivante. Guéri à l'automne 1935, il part l'année d'après, mais il rechute un mois après son arrivée et ne reprend son enseignement qu'au printemps 1937, à Vienne.

Tant qu'on ne disposera pas du dossier médical de Gödel (il était suivi par un psychiatre de Princeton), la maladie de Gödel restera mystérieuse. Elle commence par une hypocondrie : obsédé par son régime et sa digestion, il note quotidiennement, pendant plus de 20 ans, sa température et sa consommation de magnésie. Il redoute initialement un empoisonnement accidentel, mais, vers la fin de sa vie, il craint qu'on ne veuille le tuer en l'empoisonnant. Il cesse presque de s'alimenter, tandis qu'il prend de nombreuses pilules contre une maladie cardiaque imaginaire.

En dehors des crises aiguës, la capacité de travail de Gödel est peu perturbée par ses problèmes mentaux. Il est soutenu par Adèle Porkert, qu'il a rencontrée dans une boîte de nuit de Vienne, pendant ses études. Son aînée de six ans,

Adèle est catholique, divorcée, danseuse de profession. Les parents de Gödel la jugent dépravée, mais le couple est très uni, et elle l'aide souvent à surmonter sa peur grandissante de l'empoisonnement en jouant le rôle de goûteuse. Ils se marient en septembre 1938, juste avant le retour de Gödel en Amérique, où il doit présenter ses nouveaux résultats en théorie des ensembles à Princeton et à l'Université de Notre-Dame.

Ces résultats résolvent des questions anciennes. À la fin du XIX^e siècle, le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918) a trouvé un moyen de comparer la taille des ensembles infinis : on apparie les éléments de l'ensemble A et ceux de l'ensemble B ; si cet appariement laisse des éléments de A non appariés, alors l'ensemble A est plus grand que l'ensemble B . Ainsi Cantor a démontré que l'ensemble des nombres naturels est plus petit que l'ensemble des nombres réels. De plus, il a supposé qu'aucun ensemble de taille intermédiaire n'existe : c'est l'hypothèse du continu.

En 1908, Ernst Zermelo (1871-1953), compatriote de Cantor, a formulé une liste d'axiomes pour la théorie des ensembles. Parmi cette liste figure l'axiome du choix, qui stipule que, si l'on considère une collection infinie d'ensembles disjoints, qui contiennent chacun au moins un élément, on peut former un ensemble en retenant un élément de chaque ensemble de la collection. Malgré son apparente évidence, l'axiome du choix a des conséquences paradoxales. Par exemple, si on l'accepte, on doit aussi admettre qu'une sphère est décomposable en un nombre fini de morceaux que l'on peut séparer et rassembler en une nouvelle sphère de volume double de la première.

L'axiome du choix est très controversé : les mathématiciens contemporains de Gödel soupçonnent, à juste titre, que ni l'axiome du choix ni l'hypothèse du continu ne peuvent être déduits des autres axiomes de la théorie des ensembles. Ils craignent que l'utilisation de ces théorèmes dans des démonstrations ne mènent à des contradictions. Cependant, Gödel démontre que les deux axiomes sont cohérents avec les autres.

Les résultats de Gödel en théorie des ensembles répondent à une question posée par Hilbert en 1900 lors du Congrès international des mathématiciens. Malgré leur importance, ils ne lui procurent pas un poste permanent. Pendant son année passée à Princeton et à l'Université de Notre-Dame, son autorisation d'enseigner dans les universités autrichiennes lui est retirée. Pendant l'été 1939, alors qu'il rejoint sa femme à Vienne, il est convoqué pour un examen médical militaire, et déclaré apte au service dans les forces armées nazies.

Les propositions indécidables

Le résultat le plus célèbre de Gödel concerne des propositions sur les nombres naturels, vraies mais indémonstrables dans l'arithmétique. La phrase réflexive suivante est un exemple simple de propositions vraies, mais indécidables, c'est-à-dire ni démontrables ni réfutables :

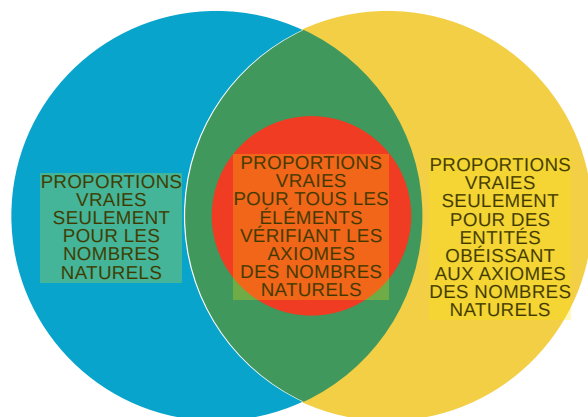
«*Cette proposition est indémontrable.*»

Elle peut être transformée en un nombre selon une méthode mise au point par Gödel. Ensuite, on montre d'une part que si cette proposition est démontrable, sa négation l'est aussi : elle est donc indémontrable. D'autre part, on prouve qu'elle est néanmoins vraie.

Les équations polynomiales conduisent à des propositions un peu plus compliquées. Par exemple, l'affirma-

tion que certaines équations polynomiales n'ont pas de racines (c'est-à-dire de solutions) entières est indécidable.

Gödel a démontré que les axiomes qui définissent les nombres entiers naturels sont incomplets : certaines propositions vraies de la théorie des nombres sont indémonstrables à l'aide de ces axiomes. Sa démonstration montre, par conséquent, qu'il existe des entités, nommées entiers non standards, différentes des nombres naturels qui obéissent néanmoins à ces axiomes. Comme tout ce qui est démontré à partir des axiomes (*en rouge*) s'applique à toutes les entités qui obéissent aux axiomes, certaines propositions vraies concernant les nombres naturels (*en bleu*, *en vert* et *en rouge*) sont nécessairement indémonstrables (*en bleu et en vert*).



Brian Christie