

Les concepts et les méthodes introduits par Gödel sont au centre de la théorie de la récurrence, centrale en informatique. Ses idées sont à l'origine de nombreux résultats sur les limites des procédures informatiques, par exemple, sur le caractère indécidable de la durée d'exécution des programmes : pour une donnée d'entrée et un programme fixé, un ordinateur s'arrêtera-t-il finalement, en produisant une donnée de sortie, ou finira-t-il dans une boucle infinie ? De même, aucun programme ne peut détecter tous les programmes qui modifient le système d'exploitation d'un ordinateur (les virus, par exemple) sans modifier lui-même ce système.

LE REFUGE AUX ÉTATS-UNIS

Gödel passe l'année universitaire 1933-1934 à l'Institut des études avancées de Princeton, où il enseigne son théorème d'incomplétude. Une «dépression nerveuse» peu après son retour à Vienne

l'empêche d'y retourner l'année suivante. Guéri à l'automne 1935, il part l'année d'après, mais il rechute un mois après son arrivée et ne reprend son enseignement qu'au printemps 1937, à Vienne.

Tant qu'on ne disposera pas du dossier médical de Gödel (il était suivi par un psychiatre de Princeton), la maladie de Gödel restera mystérieuse. Elle commence par une hypocondrie : obsédé par son régime et sa digestion, il note quotidiennement, pendant plus de 20 ans, sa température et sa consommation de magnésie. Il redoute initialement un empoisonnement accidentel, mais, vers la fin de sa vie, il craint qu'on ne veuille le tuer en l'empoisonnant. Il cesse presque de s'alimenter, tandis qu'il prend de nombreuses pilules contre une maladie cardiaque imaginaire.

En dehors des crises aiguës, la capacité de travail de Gödel est peu perturbée par ses problèmes mentaux. Il est soutenu par Adèle Porkert, qu'il a rencontrée dans une boîte de nuit de Vienne, pendant ses études. Son aînée de six ans,

Adèle est catholique, divorcée, danseuse de profession. Les parents de Gödel la jugent dépravée, mais le couple est très uni, et elle l'aide souvent à surmonter sa peur grandissante de l'empoisonnement en jouant le rôle de goûteuse. Ils se marient en septembre 1938, juste avant le retour de Gödel en Amérique, où il doit présenter ses nouveaux résultats en théorie des ensembles à Princeton et à l'Université de Notre-Dame.

Ces résultats résolvent des questions anciennes. À la fin du XIX^e siècle, le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918) a trouvé un moyen de comparer la taille des ensembles infinis : on apparie les éléments de l'ensemble *A* et ceux de l'ensemble *B* ; si cet appariement laisse des éléments de *A* non appariés, alors l'ensemble *A* est plus grand que l'ensemble *B*. Ainsi Cantor a démontré que l'ensemble des nombres naturels est plus petit que l'ensemble des nombres réels. De plus, il a supposé qu'aucun ensemble de taille intermédiaire n'existe : c'est l'hypothèse du continu.

En 1908, Ernst Zermelo (1871-1953), compatriote de Cantor, a formulé une liste d'axiomes pour la théorie des ensembles. Parmi cette liste figure l'axiome du choix, qui stipule que, si l'on considère une collection infinie d'ensembles disjoints, qui contiennent chacun au moins un élément, on peut former un ensemble en retenant un élément de chaque ensemble de la collection. Malgré son apparente évidence, l'axiome du choix a des conséquences paradoxales. Par exemple, si on l'accepte, on doit aussi admettre qu'une sphère est décomposable en un nombre fini de morceaux que l'on peut séparer et rassembler en une nouvelle sphère de volume double de la première.

L'axiome du choix est très controversé : les mathématiciens contemporains de Gödel soupçonnent, à juste titre, que ni l'axiome du choix ni l'hypothèse du continu ne peuvent être déduits des autres axiomes de la théorie des ensembles. Ils craignent que l'utilisation de ces théorèmes dans des démonstrations ne mènent à des contradictions. Cependant, Gödel démontre que les deux axiomes sont cohérents avec les autres.

Les résultats de Gödel en théorie des ensembles répondent à une question posée par Hilbert en 1900 lors du Congrès international des mathématiciens. Malgré leur importance, ils ne lui procurent pas un poste permanent. Pendant son année passée à Princeton et à l'Université de Notre-Dame, son autorisation d'enseigner dans les universités autrichiennes lui est retirée. Pendant l'été 1939, alors qu'il rejoint sa femme à Vienne, il est convoqué pour un examen médical militaire, et déclaré apte au service dans les forces armées nazies.

Les propositions indécidables

Le résultat le plus célèbre de Gödel concerne des propositions sur les nombres naturels, vraies mais indémonstrables dans l'arithmétique. La phrase réflexive suivante est un exemple simple de propositions vraies, mais indécidables, c'est-à-dire ni démontrables ni réfutables :

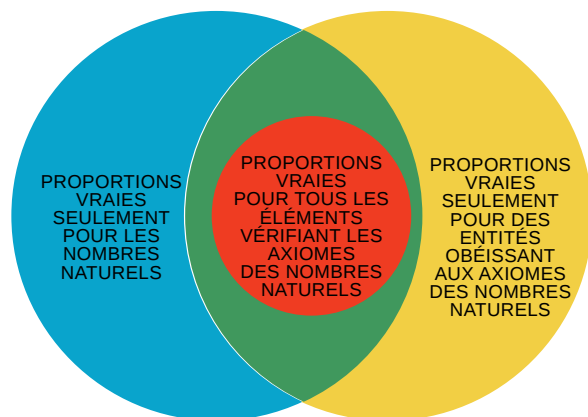
«*Cette proposition est indémontrable.*»

Elle peut être transformée en un nombre selon une méthode mise au point par Gödel. Ensuite, on montre d'une part que si cette proposition est démontrable, sa négation l'est aussi : elle est donc indémontrable. D'autre part, on prouve qu'elle est néanmoins vraie.

Les équations polynomiales conduisent à des propositions un peu plus compliquées. Par exemple, l'affirma-

tion que certaines équations polynomiales n'ont pas de racines (c'est-à-dire de solutions) entières est indécidable.

Gödel a démontré que les axiomes qui définissent les nombres entiers naturels sont incomplets : certaines propositions vraies de la théorie des nombres sont indémonstrables à l'aide de ces axiomes. Sa démonstration montre, par conséquent, qu'il existe des entités, nommées entiers non standards, différentes des nombres naturels qui obéissent néanmoins à ces axiomes. Comme tout ce qui est démontré à partir des axiomes (*en rouge*) s'applique à toutes les entités qui obéissent aux axiomes, certaines propositions vraies concernant les nombres naturels (*en bleu*, *en vert* et *en rouge*) sont nécessairement indémonstrables (*en bleu et en vert*).



Brian Christie

Jusqu'alors Gödel s'est peu soucié de la tournure inquiétante des événements en Europe. Il s'est intéressé à la politique et à l'actualité, mais les événements l'ont peu ému. Son isolement l'a peut-être empêché de mesurer la gravité des événements. Il s'intéresse peu à ses collègues et professeurs, dont beaucoup sont juifs, et reste concentré sur ses travaux pendant que le monde s'écroule autour de lui. Avec sa convocation de l'armée, l'Histoire le rattrape.

Désespéré, sans emploi et menacé par l'incorporation imminente, il demande le soutien de l'Institut des études avancées et obtient des visas de sortie. En janvier 1940, le couple fuit vers l'Est à bord du Transsibérien. Puis, de Yokohama, ils embarquent pour San Francisco et atteignent enfin Princeton par le train à la mi-mars.

DES PHOBIES GRANDISSANTES

Gödel ne quittera plus les États-Unis. Après plusieurs contrats annuels, il n'est engagé de façon définitive qu'en 1946. Deux ans plus tard, il prend la nationalité américaine. À cette occasion, le juge qui lui demandait son opinion sur la constitution des États-Unis se voit affligé d'un long discours sur les incohérences logiques de ce système. C'est seulement en 1953 que Gödel est nommé professeur, alors qu'il est également élu membre de l'Académie américaine des sciences. On craignait sa maladie mentale : ne disait-il pas partout que des gaz toxiques fuyaient de son réfrigérateur ? Pendant ces années, son ami Albert Einstein s'occupe de lui de son mieux, notamment par des promenades quotidiennes. Leurs conversations apaisaient Gödel.

À son arrivée aux États-Unis, Gödel abandonne la théorie des ensembles pour se consacrer à la philosophie et à la relativité. En 1949, il montre que des univers où le voyage vers le passé est possible sont compatibles avec les équations d'Einstein. En 1950, il présente ces résultats au Congrès international des mathématiciens et, l'année suivante, il donne la prestigieuse conférence Gibbs à la réunion annuelle de l'Association mathématique des États-Unis. Entre ces deux discours, il frôle la mort, parce que sa méfiance envers les médecins lui a fait négliger un grave ulcère.

Le dernier article publié de Gödel paraît en 1958. Il se renferme ensuite progressivement sur lui-même, et, de plus en plus amaigri, devient paranoïaque et hypocondriaque. Sa dernière apparition en public date de 1972, quand l'Université Rockefeller le fait docteur *honoris*



Richard Arenis

3. LES PROMENADES AVEC EINSTEIN dans le parc de l'Institut des études avancées de Princeton étaient un des rites qui maintenaient Gödel en activité. Cette photographie date de 1954.

causa. Trois ans plus tard, quand on lui décerne la Médaille américaine des sciences, il n'assiste pas à la cérémonie, pour raison de santé.

Le 1^{er} juillet 1976, quand Gödel atteint l'âge de la retraite (70 ans), il est nommé professeur émérite de l'Institut. Toutefois sa femme, qui l'a tant materné, est handicapée par un accident vasculaire cérébral qui l'a frappée quelques mois auparavant. Il prend soin d'elle avec dévouement jusqu'en juillet 1977, lorsqu'elle est opérée d'urgence et hospitalisée pendant près de six mois.

À ce moment, Morgenstern, l'ami qui a pris la relève d'Einstein après la mort de celui-ci en 1955 pour s'occuper de Gödel, meurt d'un cancer. Gödel se retrouve seul avec sa paranoïa grandissante, et décline rapidement. Par peur d'un empoisonnement, il cesse de s'alimenter, et il meurt le 14 janvier 1978.

Adèle Gödel survit trois ans à son mari. À sa mort, le 4 février 1981, elle lègue les droits des articles de Gödel à l'Institut des études avancées. La population hautaine de Princeton l'a toujours tenue à l'écart, mais elle était fière des travaux de son mari et elle savait que, sans son soutien, il n'aurait pas pu les mener à bien.

Gödel a publié très peu d'articles de son vivant (Bernard Riemann est le seul grand mathématicien qui ait publié moins) ; cependant leur impact a été énorme. Certains de ses articles, qui étaient écrits à la main, en gothique, ont été récemment traduits et publiés dans le troisième volume de ses *Œuvres complètes*. Leur contenu, par exemple sa formalisation de la « preuve ontologique » de l'existence de Dieu, intéressent aujourd'hui l'attention jusqu'aux non-mathématiciens.

John DAWSON est professeur de mathématiques à l'Université de Pennsylvanie ; il est l'un de ceux qui ont assuré l'édition des *Œuvres complètes* de Gödel.

Ernst NAGEL, **James NEWMAN**, **Kurt GÖDEL** et **Jean-Yves GIRARD**, *Le théorème de Gödel*, Le Seuil, 1997.

Douglas R. HOFSTADTER, *Gödel, Escher, Bach*, Interéditions, 1998.

Kurt GÖDEL, *Collected Works*, vol. 1-3, sous la direction de Solomon Feferman et al., Oxford University Press, 1986, 1990, 1995.

John W. DAWSON, *Logical Dilemmas : The Life and Work of Kurt Gödel*, A.K. Peters Ltd., Wellesley, Mass., 1997.