

être aussi proche que possible de celle du problème initial. Dans le cas de l'*Odyssée*, une généralisation qui consiste à supposer toutes les distances entre les villes égales à la plus petite des distances entre villes conduit à une borne inférieure.

La programmation linéaire

Les mathématiciens connaissent de nombreuses techniques de généralisation (ou d'inclusion), mais nous ne considérerons ici que celle qui donne les meilleurs résultats : elle est fondée sur la programmation linéaire, l'une des techniques les plus importantes des mathématiques appliquées découvertes depuis la Seconde Guerre mondiale (voir *Gestion et programmation linéaire*, par Robert Bland, *Pour la Science*, août 1981). Son nom est trompeur, car elle n'a pas de rapport direct avec l'informatique ; c'est plutôt une optimisation de problèmes linéaires. On l'emploie quand on veut répartir de façon optimale des ressources limitées ; elle résout des problèmes de planification dans les compagnies de transport aérien, dans les raffineries de pétrole, dans les usines automobiles...

Pour inclure le problème d'Ulysse dans un problème que l'on puisse étudier par les techniques de programmation linéaire, on commence par dresser la liste des 120 liaisons directes entre les 16 villes, dans un ordre quelconque, et l'on affecte chaque liaison de la valeur 1 si Ulysse les utilise au cours de son circuit, de la valeur 0 dans le cas contraire. Ainsi chaque circuit est décrit par un ensemble de 120 chiffres binaires, ce que l'on nomme un vecteur dans un espace à 120 dimensions. Autrement dit, un circuit est associé à un point dans un espace à 120 dimensions.

Inversement, tout point de l'espace à 120 dimensions ne correspond pas à un circuit : il faut que 16 des coordonnées du point soient égales à 1, et que les 104 autres soient égales à 0.

Parmi les 653 837 184 000 circuits, comment choisir ceux dont la longueur totale est minimale ? Calculons d'abord leur longueur en multipliant chaque coordonnée (0 ou 1) par la longueur



4. QUAND ON SE CONTENTE de choisir la solution la plus directement séduisante, on ne parvient pas toujours à l'objectif fixé. Le «prévoyant Ulysse», lui, voyait loin : afin d'échapper au chant des sirènes, il demanda à ses compagnons de l'attacher au mât de son navire, tandis que ses compagnons avaient les oreilles bouchées à la cire (le vase qui représente cette scène date de 450 avant notre ère).



5. TEL LE CYCLOPE Polyphème aveuglé par Ulysse, les algorithmes de recherche de circuits n'ont pas de vue d'ensemble du problème, et ils ne progressent qu'à tâtons. Pour des raisons de gain de temps, ils ne vérifient pas, chaque fois, que chaque contrainte est respectée, et ils doivent accepter de faire parfois fausse route. C'est ainsi qu'Ulysse échappa à Polyphème en se cachant sous le ventre d'un bélier (le peintre surnommé le Maître de Sapho a réalisé cette œuvre vers 510 avant notre ère).

du chemin correspondant, puis additionnons tous les produits.

L'étape décisive vient ensuite : nous considérons les composantes du vecteur comme des variables qui peuvent prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 et

1. On obtient ainsi des points de l'espace à 120 dimensions qui ne correspondent généralement pas à des circuits : Ulysse ne peut manifestement pas effectuer un circuit passant par les 16 villes s'il se rend une demi-fois d'Ithaque à Troie, ou 0,17 fois de Messine à Gibraltar. En revanche, cette généralisation est de celle que nous cherchions. La fonction coût cherchée, la longueur totale du circuit, est une fonction des 120 variables : toute perturbation de l'une des variables modifie la fonction coût d'une valeur proportionnelle à la perturbation, le facteur de proportionnalité étant égal à la longueur de l'étape correspondante.

On connaît un procédé efficace pour chercher le minimum d'un problème linéaire quand on impose des contraintes qui sont également linéaires : c'est l'algorithme du simplexe. Considérons tous les points (ou vecteurs) de l'espace habituel dont les coordonnées sont comprises entre 0 et 1 : ils constituent un cube dont le côté a une longueur égale à 1 et dont un sommet se trouve à l'origine de l'espace. De même, dans un espace à 120 dimensions, les vecteurs dont toutes les composantes sont comprises entre 0 et 1 forment un hypercube, à 2^{120} sommets. Une contrainte exprimée par une inéquation linéaire est comme un couteau qui élimine une partie d'un fromage : on obtient un solide limité par des faces planes.

Dans l'espace à 120 dimensions, les points qui vérifient ainsi les contraintes forment un polytope (un volume limité par des hyperplans, tout comme un polyèdre est limité par des plans) convexe. Le minimum d'une fonction coût linéaire sera toujours dans un coin (ou dans plusieurs coins) du polytope. L'algorithme du simplexe examine systématiquement, mais en restant myope, les coins du polytope jusqu'à ce qu'il soit bloqué : le coin atteint est le minimum cherché (ou l'un des divers minima possibles).