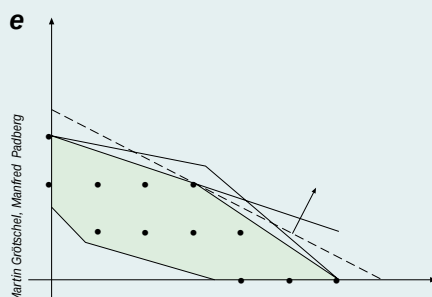
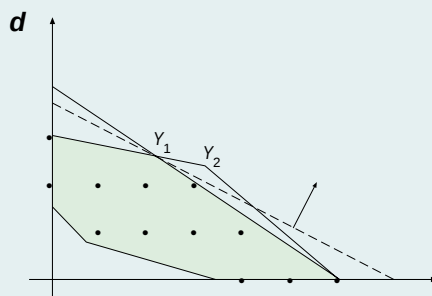
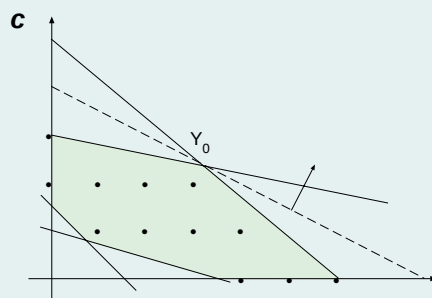
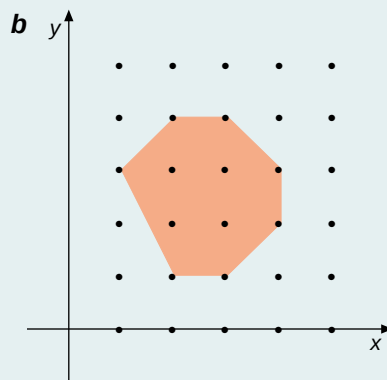
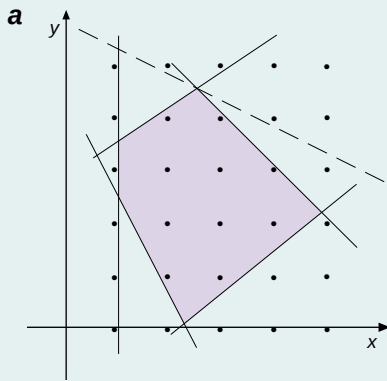


L'optimisation linéaire



La découpe des polytopes est un art difficile, car on ne sait pas où la commencer. Pour illustrer cette difficulté, examinons des exemples en deux dimensions (au lieu de trois, voire de 120). À deux dimensions, l'espace est décrit à l'aide de deux variables x et y . Une condition linéaire (exprimée par une inéquation) correspond à une droite dans le plan : tous les points situés d'un côté de la droite sont éliminés. Plusieurs conditions délimitent un polygone (dans le cas général, un polytope) qui contient les solutions acceptables du problème (a). La fonction coût est également linéaire. C'est pourquoi il existe des droites (dans le cas général, des hyperplans) sur lesquelles la fonction coût est constante. La droite en pointillés de la figure a est une telle droite : les points situés au-dessous à gauche sont tous plus chers, et les points situés à droite et au-dessus sont moins chers que ceux qui sont situés sur la droite elle-même. La solution optimale du problème (le point le moins cher du polygone) doit être un des coins de ce polygone : c'est le seul point du polygone qui rencontre la droite. Parfois l'un des côtés du polygone est parallèle à cette droite des coûts constants. En pareil cas, les deux points qui délimitent la droite, ainsi que les points intermédiaires, constituent des solutions optimales de même valeur.

Le problème linéaire qui généralise le problème initial est ici celui qui considère tous les points de l'espace, et non seulement les points de coordonnées entières (points noirs). Dans la recherche du circuit le plus court entre les 16 étapes d'Ulysse, les valeurs entières acceptables se réduisent même à 0 et à 1. Nous ne cherchons pas ici la solution optimale au problème linéaire, car elle n'est généralement pas située sur un tel ensemble de points, mais plutôt la solution optimale parmi les points situés dans la grille de points à l'intérieur du polygone. Il nous faudrait donc rectifier ce polygone de sorte qu'il ne contienne plus que les points acceptables, ainsi que tous les points situés entre eux, délimitant une enveloppe convexe qui englobe les points acceptables (b). Une telle rectification impose l'ajout de conditions supplémentaires. Malheureusement les trouver toutes est difficile, car il peut en exister un nombre gigantesque. On adopte alors une démarche itérative.

Pour identifier un faux optimum (un optimum y_0 du problème linéaire, avec des coordonnées non entières) (c), on cherche une droite (une condition exprimée par une

inéquation) qui exclut le faux optimum tout en laissant acceptables les points qui le sont. Parmi les nombreuses droites qui possèdent cette propriété, il en existe de meilleures, c'est-à-dire des droites qui découpent un gros morceau du polygone. On résout le problème linéaire à l'aide de cette condition supplémentaire (d), on trouve un nouvel optimum y_1 qui se révèle être à nouveau un faux optimum, et l'on répète le processus jusqu'à ce que l'optimum soit situé sur un point de la grille (e).

Cet algorithme de coupe est simple dans un plan, à seulement deux dimensions (déterminer la droite de coupe la plus favorable), mais il devient très difficile à mettre en œuvre dans un espace à 120 dimensions. En 1958, à l'Université Princeton, Ralph Gomory a trouvé un algorithme qui résout le problème après un nombre fini d'étapes, mais qui se révèle trop lent pour les gros problèmes. Aujourd'hui on ne cherche plus systématiquement les hyperplans de coupe, mais on se limite à ceux qui s'adaptent le mieux aux facettes du polytope.

En considérant les conditions secondaires, la solution non admissible au problème du circuit de l'*Odyssée* décrite dans l'encadré de la page 96 reste une solution non admissible, mais qui se rapproche de la solution admissible la plus courte (la solution optimale, f) et s'améliore encore à l'étape suivante, où quelques arêtes (en pointillés) sont affectées de la valeur 1/2 (g). L'étape suivante conduit à la solution optimale (h).



chemins : un chemin qui y conduit, et un chemin qui en sort. La solution du problème linéaire correspondant conduit à une longueur minimale de circuit égale à 6 113 kilomètres, ce qui représente une borne inférieure utilisable. Une telle longueur correspond à un groupe de plusieurs circuits partiels (voir l'encadré de la page 97). Cependant, comme ce groupe n'est pas lui-même un circuit, on doit ajouter une contrainte pour éliminer le point correspondant du polytope obtenu.

Il existe de nombreuses découpes possibles ; la «meilleure» est celle qui se rapproche le plus des faces du polytope réel (ces faces sont des généralisations à plusieurs dimensions des surfaces qui limitent un polyèdre à trois dimensions). Depuis 20 ans environ, de nombreuses équipes ont étudié les découpes. Ici, nous allons ajouter une contrainte qui exclut les quatre circuits partiels de la solution provisoire trouvée. On cherche alors à résoudre le problème linéaire en tenant compte de ces inéquations, une opération où excellent les programmes modernes, qui exploitent de façon astucieuse les informations contenues dans la solution provisoire.

On obtient ainsi un vecteur solution associé à une longueur de 6 228 kilomètres, qui ne permet toujours pas à Ulysse de boucler un circuit complet (voir la figure f de l'encadré de la page 97). Poursuivons en ajoutant des contraintes qui n'avaient pas été prises en compte : on obtient la solution d'un troisième problème linéaire, qui donne une fonction finale de 6 813,5 kilomètres et un vecteur solution qui ne permet toujours pas de boucler un circuit (voir la figure g). En effet, celui-ci contient, pour certaines des 120 variables, la valeur $1/2$. Une itération supplémentaire donne une valeur de 6 859 kilomètres, et le vecteur solution qui correspond au circuit optimal (voir la figure h).

Le procédé itératif précédent est nommé algorithme de coupe. Quand on connaît les inéquations qui décrivent le polytope réel, cet algorithme se termine après un nombre fini d'étapes. En revanche, l'intuition ne nous laissait pas espérer que nous atteindrions la solution en seulement quatre étapes. Aujourd'hui on ignore les inéquations qui conduiraient à coup sûr à la résolution du problème du voyageur de



6. L'OPTIMISATION à l'aide d'arcs et de flèches : quand Ulysse revient chez lui, après 20 ans d'errance, son but n'est pas atteint. En éliminant successivement les diverses conditions restantes (c'est-à-dire en tuant les prétendants), il élimine tous les points non acceptables et atteint l'optimum.

commerce ou à celle d'autres problèmes d'optimisation combinatoire importants en pratique, mais les mathématiciens appliquent leurs résultats à des problèmes combinatoires toujours plus nombreux.

L'existence des inéquations nécessaires à la résolution du problème du voyageur de commerce ou à celle d'autres problèmes d'optimisation combinatoire n'est pas assurée : la complexité de ces problèmes va peut-être de pair avec cette inexistence. Comment faire, alors ? Nous pouvons nous contenter d'une borne inférieure, ou nous pouvons aussi appliquer un algorithme d'énumération : si l'algorithme de coupe se termine sans résoudre le problème, nous savons toutefois que certains côtés du polytope ont des coordonnées qui ne sont

ni 0 ni 1. Nous pouvons alors sélectionner l'un de ces côtés, lui assigner arbitrairement une valeur 1 (indiquant que le circuit doit passer par ce point) et tenter de résoudre alors le problème ainsi limité, et simplifié. Nous pouvons également assigner la valeur 0 (le circuit ne passe pas par ce point) et choisir parmi ces deux solutions celle qui donne le meilleur résultat.

Si l'on ne résout pas non plus ce nouveau problème, on devra effectuer une autre division, et répéter le processus, formant un arbre de solutions possibles, qu'il faudra ensuite explorer astucieusement.

L'analyse d'un tel arbre s'effectue par la méthode de branchement et coupure, une méthode perfectionnée depuis les années 1960. Ainsi les exemples que nous avons considérés ici ont été calculés à l'aide d'un programme mis au point par Manfred Padberg et Giovanni Rinaldi, de l'Institut d'analyse des systèmes informatiques de Rome (IASI). Le temps de résolution pour le problème à 16 villes n'est que de quelques millisecondes sur un ordinateur de bureau moderne, alors que l'énumération prendrait 92 heures.

Pourquoi le problème du voyageur de commerce est-il si compliqué ? Parce que sa résolution impose un très grand nombre d'inéquations. Ce nombre est-il vraiment à l'origine de sa difficulté ? En partie, certainement, car bien des problèmes d'optimisation combinatoire sont faciles à résoudre, alors que leurs polytopes exigent bien plus d'inéquations que le problème du voyageur de commerce.

Martin GRÖTSCHEL est professeur de mathématiques à Berlin et Manfred PADBERG est professeur à l'Université de New York.

E. BRADFORD, *Ulysses Found*, Harcourt, Brace & World, New York, 1963.

E. L. LAWLER et al. (Hrsg.), *The Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Wiley, Chichester, 1985.

Mechthild STOER, *Design of Survivable Networks*, in *Mathematics*, vol. 1531, Springer, Berlin, 1992.

Manfred PADBERG, *Linear Optimization and Extensions*, Springer, Berlin, 1995.

Michael JÜNGER, Gerhard REINELT et Giovanni RINALDI, *The Traveling Salesman Problem*, in *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, Mauro Dell'Amico et al. (Hrsg.), Wiley, Chichester, pp. 199-221, 1997.

David APPLEGATE et al., *On the Solution of Traveling Salesman Problems*, in *Documenta Mathematica*, Numéro spécial, *Proceedings of the ICM 98*, pp. 645-656, 1998 ; <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/vol-icm/ICM.html>.

Rainer BURKARD et al., *Well-Solvable Special Cases of the Traveling Salesman Problem : A Survey*, in *SIAM Review*, vol. 40, pp. 496-546, 1998.