

chemins : un chemin qui y conduit, et un chemin qui en sort. La solution du problème linéaire correspondant conduit à une longueur minimale de circuit égale à 6 113 kilomètres, ce qui représente une borne inférieure utilisable. Une telle longueur correspond à un groupe de plusieurs circuits partiels (voir l'encadré de la page 97). Cependant, comme ce groupe n'est pas lui-même un circuit, on doit ajouter une contrainte pour éliminer le point correspondant du polytope obtenu.

Il existe de nombreuses découpes possibles ; la «meilleure» est celle qui se rapproche le plus des faces du polytope réel (ces faces sont des généralisations à plusieurs dimensions des surfaces qui limitent un polyèdre à trois dimensions). Depuis 20 ans environ, de nombreuses équipes ont étudié les découpes. Ici, nous allons ajouter une contrainte qui exclut les quatre circuits partiels de la solution provisoire trouvée. On cherche alors à résoudre le problème linéaire en tenant compte de ces inéquations, une opération où excellent les programmes modernes, qui exploitent de façon astucieuse les informations contenues dans la solution provisoire.

On obtient ainsi un vecteur solution associé à une longueur de 6 228 kilomètres, qui ne permet toujours pas à Ulysse de boucler un circuit complet (voir la figure f de l'encadré de la page 97). Poursuivons en ajoutant des contraintes qui n'avaient pas été prises en compte : on obtient la solution d'un troisième problème linéaire, qui donne une fonction finale de 6 813,5 kilomètres et un vecteur solution qui ne permet toujours pas de boucler un circuit (voir la figure g). En effet, celui-ci contient, pour certaines des 120 variables, la valeur $1/2$. Une itération supplémentaire donne une valeur de 6 859 kilomètres, et le vecteur solution qui correspond au circuit optimal (voir la figure h).

Le procédé itératif précédent est nommé algorithme de coupe. Quand on connaît les inéquations qui décrivent le polytope réel, cet algorithme se termine après un nombre fini d'étapes. En revanche, l'intuition ne nous laissait pas espérer que nous atteindrions la solution en seulement quatre étapes. Aujourd'hui on ignore les inéquations qui conduiraient à coup sûr à la résolution du problème du voyageur de



6. L'OPTIMISATION à l'aide d'arcs et de flèches : quand Ulysse revient chez lui, après 20 ans d'errance, son but n'est pas atteint. En éliminant successivement les diverses conditions restantes (c'est-à-dire en tuant les prétendants), il élimine tous les points non acceptables et atteint l'optimum.

commerce ou à celle d'autres problèmes d'optimisation combinatoire importants en pratique, mais les mathématiciens appliquent leurs résultats à des problèmes combinatoires toujours plus nombreux.

L'existence des inéquations nécessaires à la résolution du problème du voyageur de commerce ou à celle d'autres problèmes d'optimisation combinatoire n'est pas assurée : la complexité de ces problèmes va peut-être de pair avec cette inexistence. Comment faire, alors ? Nous pouvons nous contenter d'une borne inférieure, ou nous pouvons aussi appliquer un algorithme d'énumération : si l'algorithme de coupe se termine sans résoudre le problème, nous savons toutefois que certains côtés du polytope ont des coordonnées qui ne sont

ni 0 ni 1. Nous pouvons alors sélectionner l'un de ces côtés, lui assigner arbitrairement une valeur 1 (indiquant que le circuit doit passer par ce point) et tenter de résoudre alors le problème ainsi limité, et simplifié. Nous pouvons également assigner la valeur 0 (le circuit ne passe pas par ce point) et choisir parmi ces deux solutions celle qui donne le meilleur résultat.

Si l'on ne résout pas non plus ce nouveau problème, on devra effectuer une autre division, et répéter le processus, formant un arbre de solutions possibles, qu'il faudra ensuite explorer astucieusement.

L'analyse d'un tel arbre s'effectue par la méthode de branchement et coupure, une méthode perfectionnée depuis les années 1960. Ainsi les exemples que nous avons considérés ici ont été calculés à l'aide d'un programme mis au point par Manfred Padberg et Giovanni Rinaldi, de l'Institut d'analyse des systèmes informatiques de Rome (IASI). Le temps de résolution pour le problème à 16 villes n'est que de quelques millisecondes sur un ordinateur de bureau moderne, alors que l'énumération prendrait 92 heures.

Pourquoi le problème du voyageur de commerce est-il si compliqué ? Parce que sa résolution impose un très grand nombre d'inéquations. Ce nombre est-il vraiment à l'origine de sa difficulté ? En partie, certainement, car bien des problèmes d'optimisation combinatoire sont faciles à résoudre, alors que leurs polytopes exigent bien plus d'inéquations que le problème du voyageur de commerce.

Martin GRÖTSCHEL est professeur de mathématiques à Berlin et Manfred PADBERG est professeur à l'Université de New York.

E. BRADFORD, *Ulysses Found*, Harcourt, Brace & World, New York, 1963.

E. L. LAWLER et al. (Hrsg.), *The Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Wiley, Chichester, 1985.

Mechthild STOER, *Design of Survivable Networks*, in *Mathematics*, vol. 1531, Springer, Berlin, 1992.

Manfred PADBERG, *Linear Optimization and Extensions*, Springer, Berlin, 1995.

Michael JÜNGER, Gerhard REINELT et Giovanni RINALDI, *The Traveling Salesman Problem*, in *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, Mauro Dell'Amico et al. (Hrsg.), Wiley, Chichester, pp. 199-221, 1997.

David APPLEGATE et al., *On the Solution of Traveling Salesman Problems*, in *Documenta Mathematica*, Numéro spécial, *Proceedings of the ICM 98*, pp. 645-656, 1998 ; <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/vol-icm/ICM.html>.

Rainer BURKARD et al., *Well-Solvable Special Cases of the Traveling Salesman Problem : A Survey*, in *SIAM Review*, vol. 40, pp. 496-546, 1998.



L'art du pavage

IAN STEWART

Comment couvrir le plan avec un pavé pentagonal.

Les mathématiques et les art se rencontrent souvent, grâce à la symétrie. La symétrie absolue manque de variété, mais elle peut constituer la base d'œuvres artistiques remarquables : les papiers peints, les tissus, les carrelages, les jardins ou les mosaïques ont souvent une beauté captivante. Pensons aux toiles de Victor Vasarely, aux superbes kimonos du Musée de Tokyo ou à l'Alhambra, à Grenade.

Bien que les bases mathématiques de la symétrie des pavages soient connues depuis longtemps, les artistes continuent d'innover. L'artiste britannique Rosemary Grazebrook, par exemple, a récemment exploré un système de pavage très simple et pratique, différent des pavés rectangulaires usuels.

La définition mathématique de la symétrie est simple, mais subtile : une symétrie d'une figure est une transformation qui laisse la figure globalement inchangée. Par exemple, une rotation de 90 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre transforme un carré en un carré identique : cette rotation est une symétrie du carré. Une figure peut avoir plusieurs symétries, dont l'ensemble, muni de la loi de composition des transformations, est une structure mathématique de groupe (la composition est associative, admet un élément neutre, et tout élément possède un inverse).

Les pavages, maintenant, sont de plusieurs types. Celui qui a été le plus étudié est celui où les pavés forment un réseau régulier à deux dimensions. Curieusement les mathématiques des pavages furent d'abord explorées dans le cas difficile de l'espace à trois dimensions, celui des cristaux de sel, de sucre ou de tartre, et c'est seulement plus tard que les mathématiciens ont étudié l'espace à deux dimensions. En 1891, le cristallographe

russe E. Fedorov démontra que, pour les pavages du plan, il existe 17 groupes de symétries (voir la figure 2).

Ce résultat s'applique bien sûr aux papiers peints ou aux tissus, mais pourquoi, alors, les magasins d'ameublement proposent-ils tant d'échantillons différents ? Pourquoi existe-t-il tant de types de carreaux de salle de bain que les choix conjugaux deviennent souvent des scènes de ménage ? Dix-sept ne suffisent-ils pas ? Dans la plupart des cas, les différences tiennent à des caractéristiques telles que la couleur, la texture ou la nature des éléments de motifs ; la symétrie, elle, reste limitée. Par exemple, un carrelage de salle de bain composé de carreaux carrés ornés de l'image d'un canard a les mêmes symétries qu'un carrelage composé de carreaux carrés qui porteraient l'image d'une algue (à moins que le motif dessiné n'ait lui-même des symétries, qui s'ajoutent alors à celles des carreaux).

Nous n'examinerons pas ici certains pavages qui ont peu de symétries, tels les remarquables inventions du mathématicien Roger Penrose : ces pavages recouvrent entièrement le plan, mais ils ne sont pas périodiques. Les pavages que nous considérerons ici sont fondés sur une unité de base, une figure qui est répétée indéfiniment dans deux directions distinctes. Imaginons par exemple un carrelage composé de carreaux carrés tels qu'on en trouve dans tant de salles de bain. Sur un mur de salle de bain infini, le carreau carré se répète indéfiniment. Choisissons un carreau du carrelage : si l'on se déplace d'un nombre entier de côtés, verticalement ou horizontalement, on retombe sur un autre carreau identique au premier ; de même, on retrouve un carreau si l'on se déplace dans des directions intermédiaires, à condition que les déplacements verticaux

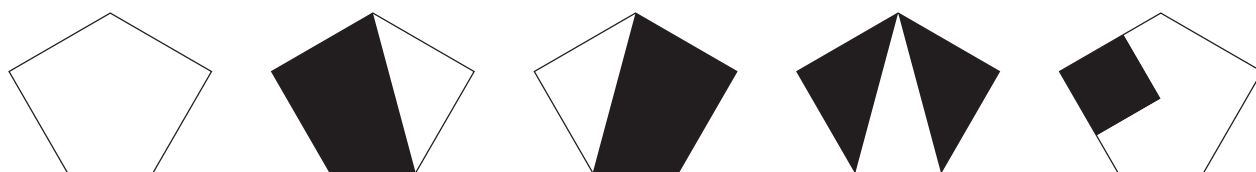
ou horizontaux soient égaux à un nombre entier de côtés.

Les droites verticales et horizontales qui joignent les centres des carreaux forment ce que l'on nomme un réseau. Les papiers peints ou les tissus ont une symétrie de réseau, car ils sont généralement réalisés à partir de grands rouleaux de papier ou de tissu, le long desquels une machine à tambour imprime un dessin. Lorsque le papier est collé sur un mur, ou quand des morceaux de tissus sont cousus ensemble, on raccorde généralement les bandes à leurs bords. On peut aussi décaler légèrement les bandes latéralement ou verticalement ; le réseau n'est alors plus carré.

Cette structure de réseau ne s'impose pas pour les pavages, dont les pavés sont des unités indépendantes, mais elle reste pratique. Le réseau carré, par exemple, possède des symétries de réflexion autour de droites verticales, horizontales ou de direction diagonale et passant par le centre d'une maille ou par un sommet du réseau, ainsi que de rotations d'angle égal à 90 degrés. Un nid d'abeilles, dont les cellules sont des hexagones réguliers, est aussi un réseau, mais avec des symétries différentes, telles des rotations de 60 degrés.

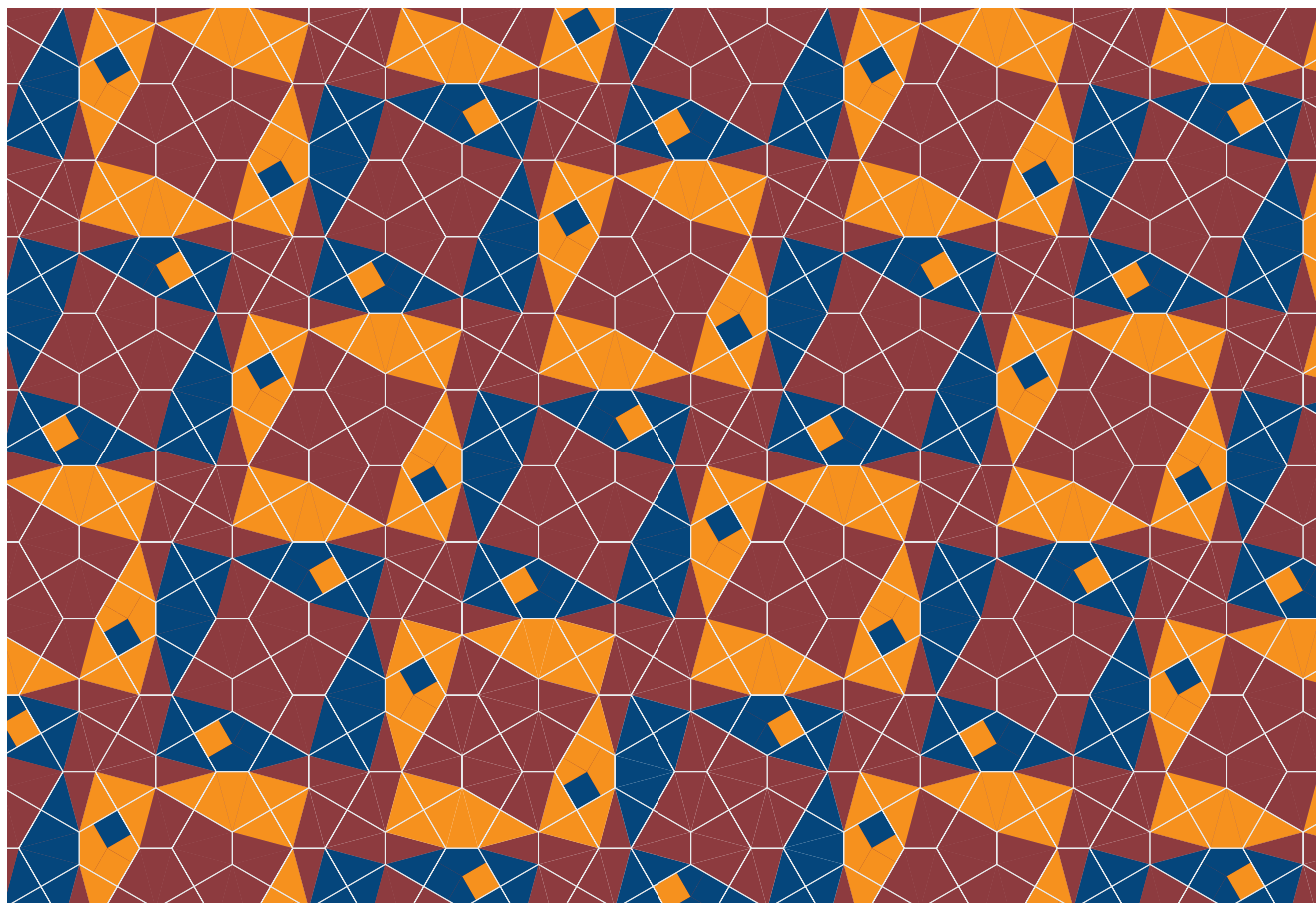
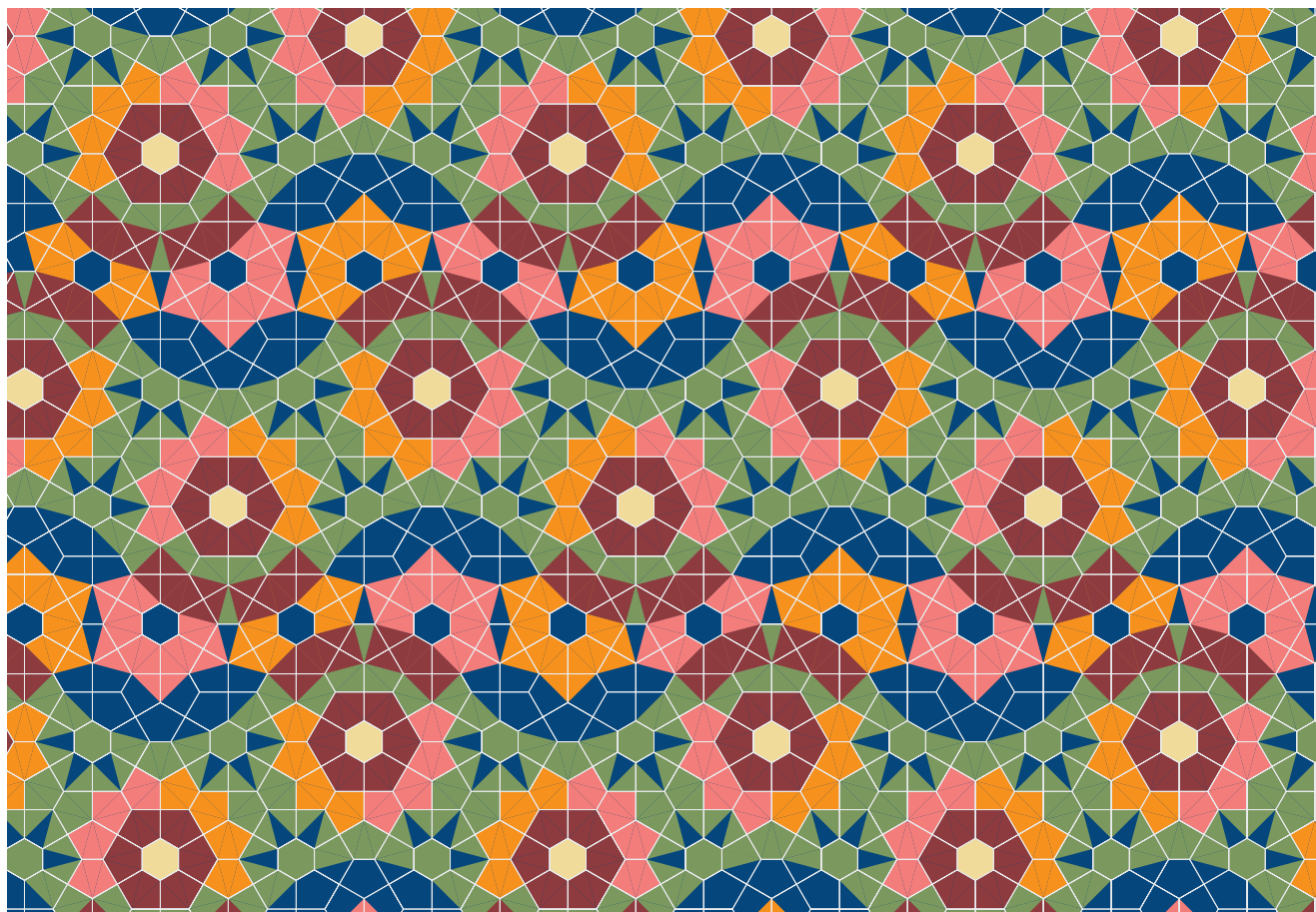
R. Grazebrook a découvert que certains pavés pentagonaux peuvent engendrer une foule de réseaux différents. Les pavés qu'elle utilise ont deux angles égaux à 90 degrés et trois angles égaux à 120 degrés, de sorte qu'on peut les associer par quatre ou par trois (voir la figure 1).

On peut juxtaposer quatre des pavés pentagonaux de R. Grazebrook pour former un hexagone plus large que haut, avec lequel on peut paver le plan, et quand on utilise à la fois les pentagones



Brian Christie

Des pavés pentagonaux colorés comme ci-dessus peuvent former un réseau quand on les associe à des hexagones réguliers (ci-contre en haut) ou quand on les juxtapose (ci-contre en bas).



Brian Christie avec l'autorisation de Rosemary Graebrook



Algorithmes et Optimisation

Que vous soyez...

... affairiste notoire, politicien corrompu, sportif dopé, escroc rutilant...
ou tout simplement prudent,

Cryptez vos données sensibles!

Belzebuth et la Société de Calcul Mathématique, SA, présentent

Sieve II le diabolique

La référence ultime en matière de cryptographie logicielle

• **simple d'installation** : Windows 95, 98, NT,

• **simple d'emploi** : mot de passe de 4 caractères,

• **inviolable** : Sieve II le diabolique utilise un procédé nouveau, le cryptage dynamique récursif, conçu par la SCM. Un prix de 10 000F est offert depuis deux ans à la première personne qui parviendra à décrypter le texte (écrit en français banal) qui accompagne le logiciel.

• **inconditionnellement garanti à vie**. Sieve II le diabolique crypte absolument tout : données (tout format), sons, images, exécutables, etc.

Livraison en recommandé, sous pli discret.

Prix de vente unitaire HT : 1 500F,
TTC : 1 809F.

(Pour quantités importantes, nous consulter)

BON DE COMMANDE

Je commande exemplaires du logiciel de cryptage Sieve II le diabolique, au prix de 1 809 F l'unité (1 500F HT).

NOM :

PRÉNOM :

ADRESSE DE LIVRAISON :

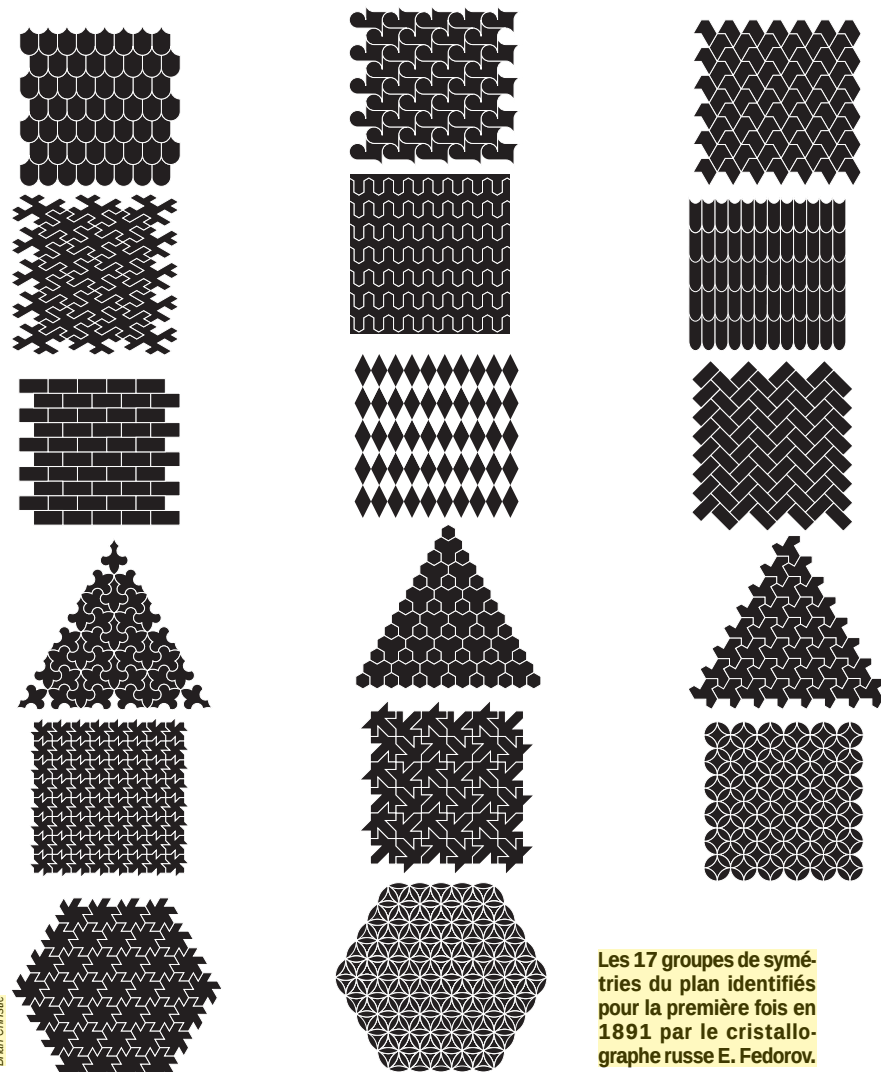
Bon à retourner, accompagné du règlement (chèque à l'ordre de SCM) à : Société de Calcul Mathématique, SA, 111, Faubourg Saint Honoré, 75 008 Paris.

de R. Grazebrook et des hexagones réguliers, on peut obtenir les 17 classes de symétries sauf une (Laquelle? Et comment obtient-on les autres? Je vous laisse le chercher).

R. Grazebrook doit l'idée initiale de ses pavages à Martin Gardner, qui fit les articles de la rubrique «Jeux mathématiques» de *Pour la Science* pendant des années. Elle étudiait l'art de l'Alhambra quand un article de Martin Gardner lui révéla les relations entre les motifs islamiques et les pavages du graveur Maurits Escher. Elle introduisit alors deux procédés distincts pour colorier ses pavés pentagonaux : soit en divisant les pavés en trois triangles (la série dite «Pentland»); soit en les divisant en quatre, (deux carrés, un quadrilatère en forme de cerf-volant et un pentagone plus petit, de la série «Penthouse»). On peut naturellement colorier les pavés pentagonaux de R. Grazebrook d'autres manières, mais ces deux séries seulement engendrent une surprenante variété de motifs.

Réactions

L'article sur les lancers de pièces et les dés (*Abrogeons la loi des moyennes*, juin 1998, p. 122) a intéressé Tom Guldbrandsen, de Lyngby, au Danemark. Supposons que nous lancions un grand nombre de fois un dé, et que nous notions le nombre de 1, de 2, ..., de 6 obtenus. Quelle est la probabilité que les six lancers soient en nombreux égaux, quand vient le n -ième lancer? T. Guldbrandsen a d'abord observé que l'égalité ne peut se produire qu'après 6, 12, 18... lancers : le nombre de lancers doit être un multiple de 6. Il a trouvé une formule qui donne, en fonction de n , la probabilité que les six totaux soient égaux. Comme cette égalité peut être vérifiée plusieurs fois, il a obtenu comme probabilité : 0,021903735824.



Les 17 groupes de symétries du plan identifiés pour la première fois en 1891 par le cristallographe russe E. Fedorov.