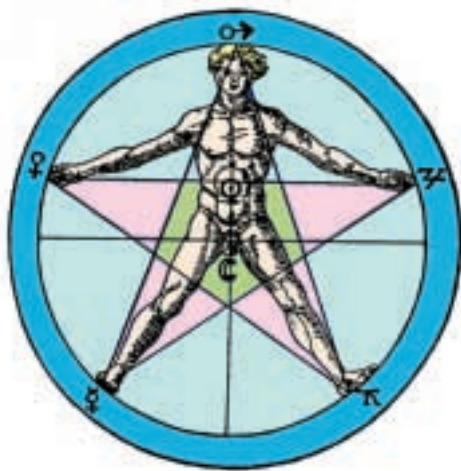




La numérologie du nombre d'or

JEAN-PAUL DELAHAYE

La géométrie ne donne pas le secret du beau : le chemin des mathématiques à la numérologie est dangereux, parce que riche en surinterprétations.

Le nombre d'or est la constante $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,61803\dots$, affublée d'autres dénominations aux relents mystiques telles que section dorée ou divine proportion. La notation Φ , introduite par Théodore Cook en 1914, est commode ; nous l'utiliserons pour traiter des périodes antérieures. Contrairement au nombre π , le symbolisme n'en est pas fixé : à la place de Φ , vous trouverez parfois la notation τ ou ϕ .

Pourquoi existe-t-il plus de livres sur le nombre d'or que sur n'importe quel autre nombre ? Aurait-il des propriétés mathématiques exceptionnelles qui le rendraient plus important que ses concurrents directs : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π ou e ? A-t-il été utilisé par les Égyptiens pour dessiner le plan de la grande pyramide ? Les Grecs ont-ils conçu la façade du Parthénon en utilisant ses propriétés ? Était-il un canevas secret pour Léonard de Vinci ou d'autres peintres ? La taille d'un être humain bien proportionné est-elle Φ fois la hauteur de son nombril ? Plus généralement, les canons du beau doivent-ils s'appuyer sur Φ ? La réponse à ces questions ne peut être impulsive. Le plus difficile sera de comprendre que répondre oui à certaines n'oblige pas à répondre oui aux autres.

EUCLIDE ET LES GÉOMÈTRES ANTIQUES

L'histoire de Φ commence trois siècles avant notre ère, à une époque où on ne le considérait pas comme un nombre : pour Euclide, comme pour tous les Grecs de son époque, seuls les entiers sont des nombres, et les rapports entre grandeurs, surtout les rapports irrationnels comme $\sqrt{2}$ ou Φ , sont traités avec prudence.

Euclide, dans ses célèbres *Éléments* aborde le problème du partage d'un segment AB par un point C qui le coupe « en extrême et moyenne raison », ce qui signifie par le point C tel que $AB/AC = AC/CB$. La solution avec nos notations modernes s'obtient en posant $AB/AC = x$. Puisque $AC + CB = AB$, $(AC + CB)/AC = AC/CB$,

et donc x doit vérifier $1 + 1/x = x$, ou encore $x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation du second degré a une racine positive, $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, soit $1,61803\dots$ et une racine négative, $\Phi' = (1 - \sqrt{5})/2$, soit $-0,61803\dots$

De cette définition de Φ , il résulte immédiatement que : $1/\Phi = \Phi - 1$, $\Phi^2 = \Phi + 1$. Pour connaître l'inverse de Φ , il suffit de lui soustraire 1 ; pour connaître son carré, il suffit de lui ajouter 1. Certes, le fait est amusant et remarquable, mais c'est une conséquence immédiate de la définition, comme il résulte de la définition de $\sqrt{2}$ que $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ (l'inverse de $\sqrt{2}$ est la moitié

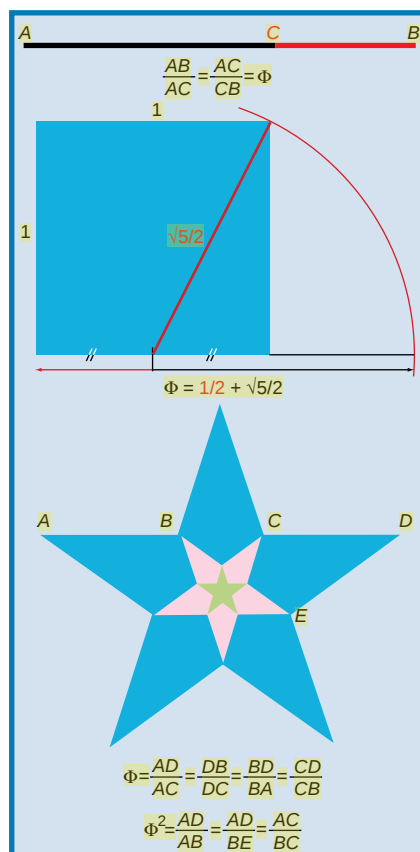
de $\sqrt{2}$), ce qui est aussi amusant et remarquable, mais pas magique !

Euclide utilise ce rapport pour construire des pentagones et formuler des propriétés du dodécaèdre et de l'icosaèdre. Ces liens ne sont rien d'autre que l'analogie de ceux qui existent entre $\sqrt{2}$ et le carré (la diagonale d'un carré de côté unité vaut $\sqrt{2}$), et le cube (dont les faces sont des carrés), ou l'analogie des liens qui existent entre $\sqrt{3}$ et le triangle équilatéral (la hauteur d'un triangle équilatéral de côté unité est $\sqrt{3}/2$), l'hexagone (décomposable en triangles équilatéraux), le tétraèdre (dont les faces sont des triangles équilatéraux), l'icosaèdre (pour la même raison), et le cube (la diagonale d'un cube de côté unité est $\sqrt{3}$).

La structure de notre espace et la géométrie élémentaire tissent ces liens qui n'ont rien de secret, ni de mystique. Vraisemblablement ce partage en extrême et moyenne raison était connu des pythagoriciens, et certains font remonter l'apparition de Φ à la Haute-Égypte, mais sans le moindre indice sérieux.

Euclide étudie par jeu et pour le plaisir les découpages en extrême et moyenne raison qui sont le sujet d'exercices de géométrie. La proposition III du livre XIII énonce par exemple que : une ligne est coupée en extrême et moyenne raison, le carré du plus petit segment, augmenté de la moitié du plus grand segment, est égal au quintuple du carré de la moitié du plus grand segment, ce qui traduit, avec nos notations, donne : $(1 + \Phi/2)^2 = 5 (\Phi/2)^2$ qui, en développant, devient $1 + \Phi + \Phi^2/4 = 5\Phi^2/4$, relation équivalente à $\Phi^2 = \Phi + 1$. Aucun commentaire admiratif ou esthétique n'accompagne l'utilisation de ce rapport de grandeur qui n'est, pour Euclide, qu'un outil commode.

Le livre de Roger Herz-Fisher (1987, 1998, Dover Publication, New York) retrace dans le détail et avec une étonnante érudition cette aventure du « rapport en extrême et moyenne raison » chez les géomètres jusqu'au XIX^e siècle. Loin d'être une pièce centrale de la science mathé-



1. Φ et la symétrie d'ordre cinq. Euclide utilise le découpage en extrême et moyenne raison. On indique ici la construction géométrique de Φ et les propriétés du pentagone étoilé.

matique qui s'élabore, Φ n'apparaît souvent qu'au détour d'une figure ou d'une équation que, rétrospectivement, nous interprétons comme liée à lui. Aucun mysticisme ne lui est attaché. Le nombre Φ est la solution d'une équation du second degré, alors qu'en revanche les nombres π et e , ne le sont pas puisqu'ils sont transcendants (un nombre transcendant n'est racine d'aucune équation polynomiale quel qu'en soit le degré).

UN MOINE GÉOMÈTRE

La naissance de Φ comme objet d'attention particulière et de culte est due au moine franciscain Luca Pacioli (vers 1445-1514), qui écrit à Milan, en 1498, un ouvrage qui lui est consacré, intitulé *De divina proportionne*. Il fait un usage géométrique systématique du partage en extrême et moyenne raison dont, en bon professeur de théologie, il remercie Dieu en qualifiant ce partage de divin (d'où le titre de son ouvrage), en particulier à cause de ses relations avec le dodécaèdre qui, chez Platon, représente l'Univers. Léonard de Vinci dessinera pour cet ouvrage soixante polyèdres. Deux annexes seront ajoutées plus tard, l'une traitant d'architecture et l'autre des proportions du corps humain. Ces annexes ne mentionnent pas la divine proportion, à laquelle Pacioli n'attribue aucune propriété esthétique particulière.

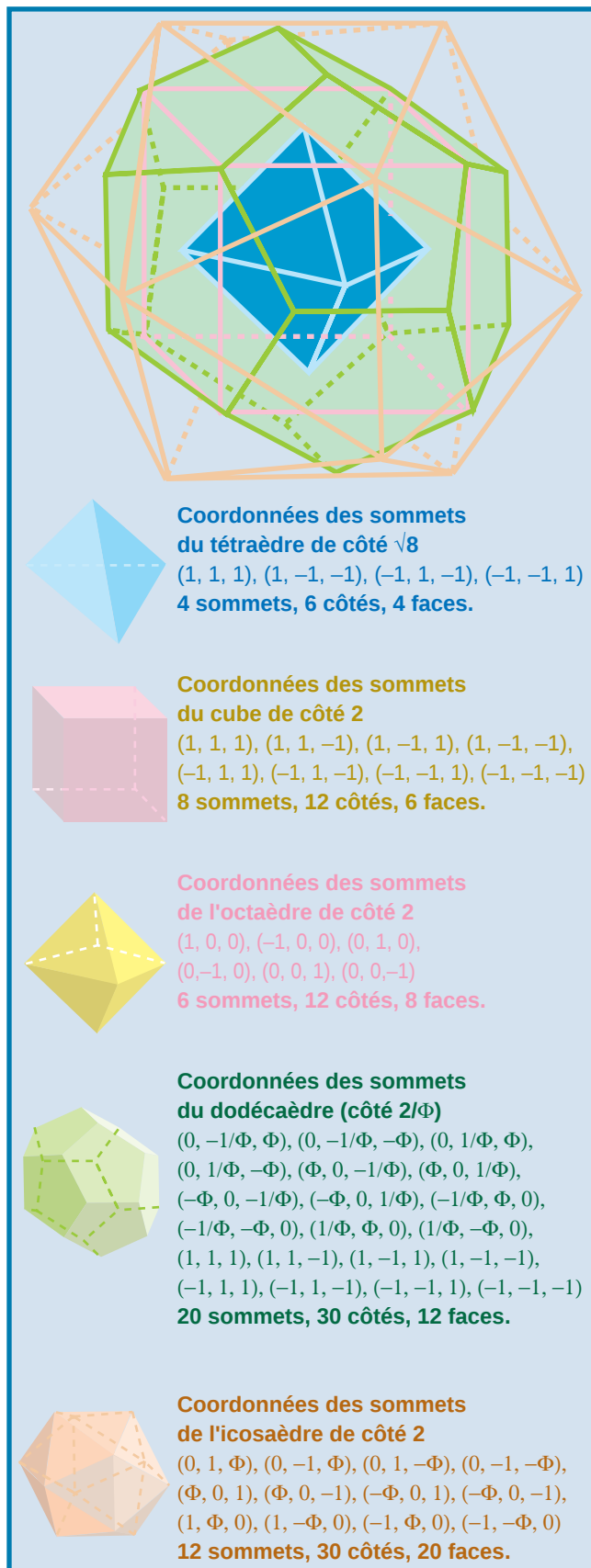
Léonard de Vinci, dans son traité de la peinture, ne mentionne pas la divine proportion lorsqu'il traite de composition ou du corps humain. Le fameux homme vitruvien de Léonard de Vinci, qui sert d'emblème à une société de travail par intérim, ne se fonde pas sur la divine proportion, comme on l'a parfois prétendu, mais sur un cercle, un carré et des divisions en quarts et huitièmes.

En cherchant bien, on peut prétendre que certaines œuvres de cette époque, ou même plus anciennes, ont été conçues en s'appuyant sur un découpage géométrique du tableau ou de ses éléments (personnages, objets, etc.) utilisant la divine proportion, mais aucun traité de peinture ou d'architecture de cette époque ne mentionne ce mode de découpage, alors qu'on en cite bien d'autres utilisant des rapports entre nombres entiers $5/8$, $2/3$, etc.

À cette époque aussi, les théoriciens formulent de nombreux canons pour dessiner le corps humain, mais toujours fondés sur des rapports de nombres entiers. Dans son traité des proportions, Lomazzo (1649) indique, par exemple, que le corps doit être 7,5 fois plus grand que la tête. Alberti, dans son ouvrage *Della re aedificatori*, publié en 1485, fonde sa théorie des proportions sur les rapports musicaux : $1/2$, $3/4$, $2/3$, $4/6/9$, $9/6/16$, etc. Les artistes et maçons du Moyen Âge utilisent de nombreux procédés pour structurer les tableaux et les vitraux. Des triangles équilatéraux, des carrés posés sur la pointe, des octogones, des hexagones sont fréquemment utilisés. Plus rarement, on se sert de pentagones, et alors naturellement, apparaissent des rapports utilisant $\sqrt{5}$, et donc la divine proportion, dont la présence n'est que la conséquence naturelle de l'utilisation d'une symétrie d'ordre cinq.

Alberti et Dürer montrent qu'il n'existe pas de règle unique : personne à cette époque ne soutient que la divine proportion doit organiser les compositions géométriques. C'est une affirmation gratuite et infondée que de prétendre qu'au sein de sociétés occultes s'est transmise une «tradition égyptienne» pour composer des œuvres architecturales ou picturales à partir de la divine proportion.

Le mythe d'un secret de la beauté cachée dans Φ apparaît au XIX^e siècle en Allemagne, où Adolf Zeising (1810-1876), professeur de philosophie à Leipzig et à Munich, défend une théorie qui met en avant la section dorée et l'érige en norme esthétique. Il applique sa théorie à la morphologie, aux temples grecs, aux cathédrales, aux tableaux de Raphaël. Sûr de son



2. Quatre des cinq solides platoniciens emboîtés les uns dans les autres. Les coordonnées des cinq polyèdres réguliers peuvent toutes être exprimées uniquement à partir de 1 et Φ (à condition toutefois de choisir une arête de longueur $2\sqrt{2}$ pour le tétraèdre, 2 pour le cube, $\sqrt{2}$ pour l'octaèdre, $2/\Phi$ pour le dodécaèdre, 2 pour l'icosaèdre).