

par l'intuition. Ainsi, toute proposition a une «valeur de vérité» (être vraie ou être fausse), que cette valeur ait été établie ou non par les mathématiciens ou par un moyen expérimental. Il admettra ultérieurement que cette philosophie a facilité ses intuitions mathématiques.

Observateur attentif et brillant, Gödel s'exprime rarement lors des discussions du Cercle, sauf lorsqu'elles concernent les mathématiques. Timide et solitaire, il a peu d'amis intimes (cependant, il apprécie la compagnie des femmes, qui le trouvent séduisant). Après 1928, il délaisse peu à peu le groupe et s'investit dans un séminaire de mathématiques organisé par Menger. Gödel participe à la publication annuelle des actes ; il publiera ainsi une dizaine d'articles.

UN GÉNIE RÉSERVÉ

C'est l'époque à laquelle Gödel acquiert une réputation internationale en logique mathématique, notamment grâce à deux articles : sa thèse, soutenue à l'Université de Vienne en 1929 et publiée l'année suivante, et son traité *Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés*, publié en allemand en 1931 et présenté comme thèse d'habilitation à l'enseignement en 1932. Dans les *Principia Mathematica* de Bertrand Russell (1872-1970) et d'Alfred Whitehead (1861-1947), les auteurs proposent la logique comme fondement des mathématiques. Ils résolvent un problème posé en 1928, par David Hilbert (1862-1943) et par Wilhelm Ackermann (1896-1962) dans leurs *Fondements de la Logique théorique* : Hilbert et Ackermann y énoncent des règles de manipulation d'expressions logiques composées de connecteurs (et, ou...), de quantificateurs (pour tout, il existe...), et de variables (nombres, propositions, ensembles...). Les règles de manipulation admises ajoutées aux axiomes d'une théorie mathématique permettent-elles de déduire toutes les propositions vraies pour toute structure vérifiant les axiomes ? Plus simplement, peut-on démontrer tout ce qui est vrai pour toutes les interprétations des symboles ?

La réponse attendue était oui, et Gödel le confirme dans sa thèse intitulée *La complétude du calcul des prédicats du premier ordre*, où il établit que les principes de la logique prouvent tout ce qui est vrai à partir d'un ensemble d'axiomes donné. Cependant, il ne démontre pas que les axiomes alors admis pour la théorie des nombres permettent de démontrer toutes les propositions à propos des nombres. Les axiomes de la théorie des nombres avaient été proposés par le

mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932) en 1889 ; ils incluent l'axiome de récurrence, qui affirme que toute propriété vraie pour zéro, et vérifiée par le nombre $n+1$ lorsqu'elle est vraie pour le nombre n , est vraie pour tout entier naturel. Cet axiome semble évident, mais il gêne les mathématiciens parce qu'il concerne les propriétés des nombres plutôt que les nombres eux-mêmes : c'est un axiome du second ordre, qui semble trop éloigné des nombres pour définir ces derniers. De la même manière, savoir qu'un ballon est bleu n'indique pas ce qu'est un ballon.

L'axiome de récurrence avait été reformulé sous la forme d'un groupe infini d'axiomes identiques, qui se rapportaient à des formules spécifiques plutôt qu'aux propriétés générales des nombres. Malheureusement, le logicien norvégien Thoralf Skolem avait démontré que ces axiomes ne caractérisent pas seulement des nombres naturels : ils sont également vérifiés par d'autres structures nommées entiers non standards.

Le théorème de complétude de Gödel indique que l'on peut démontrer toutes les propositions qui découlent des axiomes ; cependant une proposition qui est vraie pour les nombres naturels, mais fausse pour un autre système d'éléments qui vérifient les mêmes axiomes, est alors indémontrable (voir l'encadré). Les mathématiciens dédaignent la restriction en espérant qu'il n'existe pas d'entités similaires aux nombres.

L'article que Gödel publie en 1931 bouleverse alors les mathématiques. Il

montre que certaines propositions vraies pour les nombres naturels sont indémonstrables : il existe des objets qui vérifient les axiomes de la théorie des nombres, mais se comportent différemment à d'autres égards. En prenant toutes les propositions vraies pour axiomes, on contournerait ce «théorème d'incomplétude» ; mais alors comment savoir si les propositions sont vraies ? Gödel montre que, lorsque les axiomes sont décrits par un ensemble de règles mécaniques, le choix des axiomes n'évite pas la difficulté : quand elles sont vraies pour les nombres naturels, d'autres propositions vraies sur ces nombres restent indémonstrables.

Par exemple, lorsque les axiomes ne se contredisent pas mutuellement, cette non-contradiction, correctement codée en une proposition numérique, est formellement indécidable, c'est-à-dire ni démontrable ni réfutable à partir des axiomes. La démonstration de la non-contradiction nécessite donc des principes plus puissants que les axiomes eux-mêmes.

Ce dernier résultat ruine le programme de David Hilbert, qui voulait renforcer les fondements des mathématiques et déduire la cohérence des théories mathématiques complexes de celle de théories plus simples. Pour Gödel, en revanche, les théorèmes d'incomplétude ne réfutent pas l' inanité de la méthode axiomatique, mais ils montrent que la démonstration de théorèmes ne peut être complètement mécanisée et ils justifient l'intuition en mathématique.



2. LE COUPLE ADÈLE PORKERT ET KURT GÖDEL était très uni. Ils sont ici à la terrasse d'un café de Vienne, pendant leurs longues fiançailles. Adèle Porkert protégeait Gödel de ses seurs irrationnelles et était souvent la seule personne à pouvoir le convaincre de manger. Plus que quiconque, elle a contribué à le maintenir en vie et en état de travailler.