

page en deux (le rectangle $\sqrt{2} : 1$ est le seul qui, lorsqu'il est coupé en deux par le milieu, donne deux rectangles semblables au rectangle initial). Pas plus que le format de papier américain, ou celui de cette revue, les rectangles utilisés pour les écrans de cinéma et de télévision etc., ne sont des rectangles d'or. Le format des cartes de crédit s'en approche, mais reste une exception.

Même si, objectivement, le rectangle d'or ne possède pas de propriétés esthétiques exceptionnelles, rien n'interdit à ceux qui pensent le contraire de les utiliser comme des canevas préparatoires à leurs toiles ou aux plans de leurs constructions. C'est d'ailleurs ce qui se produit, et c'est pourquoi de nombreuses œuvres d'art utilisent le nombre d'or. Le tableau de Salvador Dali *Sacrement de la dernière cène* est l'une de ces œuvres bâties sur le nombre d'or (il contient d'ailleurs un dodécaèdre). D'autres comme *Le repas chez Levi* de Véronèse, *La résurrection* du Tintoret, par exemple, semblent aussi conçus en utilisant aussi un découpage fondé sur Φ . Au début du siècle, Φ a d'ailleurs été explicitement au centre des préoccupations des peintres Maurice Denis, Paul Sérusier, Juan Gris, Seurat, Puvis de Chavannes qui l'utilisèrent. La théorie esthétique du nombre d'or en peinture est un bel exemple de théorie auto-réalisatrice : le seul fait de l'énoncer et d'y croire fait qu'on l'applique et donc la rend vraie, du moins partiellement.

Les théories esthétiques du nombre d'or gênent par leur côté totalitaire et exclusif. D'autres théories esthétiques plus ouvertes, comme celles de Jay Hambridge et d'Edwards B. Edwards aux États-Unis, ont accordé autant d'importance aux autres nombres irrationnels élémentaires $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{5}$ et ont suggéré d'exploiter les propriétés spécifiques clairement identifiées des rectangles fondés sur ces nombres. De telles théories, à conditions qu'elles ne prétendent pas interdire l'utilisation de divisions par des rapports entiers (eux aussi intéressants), sont utiles et conduisent incontestablement à d'intéressantes réussites picturales. Ces considérations esthétiques ne sont pas absurdes, ramenées à leurs justes, mais non divines, proportions.

CONSTANTES FRÉQUENTES

Finalement, en mathématiques et en science, le nombre d'or est-il important ? Le nombre d'or est naturellement associé à certaines figures géométriques simples, mais aussi à d'autres situations qui n'ont rien à voir avec la géométrie. Comme chacun le sait, la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... (chaque terme est obtenu

8. LE NOMBRE D'OR ET FIBONACCI

La suite de Fibonacci est définie par $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$... Chaque élément est la somme des deux précédents.

Cette suite possède de nombreux liens avec le nombre d'or.

(a) La limite

La limite, quand n tend vers l'infini, de F_{n+1}/F_n est Φ : une bonne approximation de Φ est donnée par le quotient F_{n+1}/F_n . Ainsi $13/8 = 1,625$, alors que $\Phi = 1,6181339$...

(b) Les formules donnant Φ^n

$\Phi^2 = \Phi + 1$; $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = 2\Phi + 1$; $\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = 3\Phi + 2$; $\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = 5\Phi + 3$; $\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5$. La formule générale est : $\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n = F_{n+2}\Phi + F_{n+1}$.

(c) La formule de Binet

$F_n = (\Phi^n - (-1/\Phi)^n) / \sqrt{5}$.

(d) La formule avec la partie entière

$F_n = [\Phi^n / \sqrt{5} + 1/2]$ ($[x]$ désigne la partie entière de x).

comme la somme des deux précédents) est fortement liée à Φ .

Certains résultats mathématiques font intervenir Φ en dehors de tout contexte géométrique. Ainsi, un résultat d'optimisation indique que, pour connaître le maximum d'une fonction continue, croissante puis décroissante, une méthode très efficace consiste à l'évaluer en des points qui découpent le segment auquel on s'intéresse selon le rapport Φ .

La plus simple des fractions continues est celle de Φ :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Cela ne signifie pas que Φ est le plus simple des irrationnels : $\sqrt{3}$ pourrait aussi revendiquer ce titre, puisqu'il est présent dans le plus simple des polygones réguliers (le triangle équilatéral). Le nombre $\sqrt{2}$ lui aussi peut revendiquer ce titre (2 vient avant 3, $\sqrt{2}$ est associé à l'angle droit, le plus simple des angles) : il n'y a pas d'irrationnel le plus simple. La formule :

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

est certes très belle, mais plus compliquée que $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$. D'autres occurrences de Φ apparaissent ici et là en mathématiques, mais nul mystère à cela : Φ est solution d'une équation simple et les choses simples se retrouvent partout ; il en va de même des autres constantes mathématiques e , π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, qui, chacune à sa façon, est simple (la définition de chacune tient en quelques mots).

Le nombre π est évidemment bien mieux représenté dans la nature que Φ puisque dès qu'on rencontre un cercle ou une sphère, le nombre π est implicitement donné : mesurez la longueur du

périmètre du premier arbre venu et divisez-le par le diamètre vous trouverez une valeur proche de π ! De même, $\sqrt{2}$ apparaît dès que des carrés sont présents (il y en a dans les cristaux) et $\sqrt{3}$, dès qu'on a des réseaux triangulaires ou hexagonaux (cristaux, nids d'abeilles, par exemple), etc.

La découverte des quasicristaux (ayant une symétrie d'ordre cinq), des molécules dont la forme est celle d'un dodécaèdre, et des virus ayant aussi cette forme montre que la symétrie d'ordre cinq est plus fréquemment utilisée par la nature qu'on ne l'imaginait il y a 20 ans. Cela accroît légèrement l'importance en science de la constante mathématique Φ , qui cependant reste loin derrière $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π ou e .

Le mythe du nombre d'or plaît, car il procure à ceux qui l'adoptent l'illusion agréable de détenir un secret essentiel du monde. On peut parier que ce sentiment survivra longtemps encore : ni les travaux de Gustav Theodor Fechner qui, dès le XIX^e siècle le réfutait, ni ceux de Marguerite Neveux, qui dénonçant l'inconsistance de sa base historique, montrent le peu de sérieux de ses thuriféraires, ni bien sûr cet article, ne suffiront à l'éteindre.

J.-P. ADAM, *Le passé recomposé : chroniques d'archéologie fantasque*, Seuil, Paris, 1988.

C. BOULEAU, *Charpentiers. La géométrie secrète des peintres*, Seuil, Paris, 1983.

M. GHYKA, *Le nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens...* Gallimard, 1931.

Roger HERZ-FISHER (1987, 1998, Dover Publication, New York)

H. E. HUNTLEY, *The Divine Proportion : A Study in Mathematical Beauty*, Dover Publications, New York, 1970.

M. NEVEUX, *Le nombre d'or. Radiographie d'un mythe (suivi de La divine proportion de H. Huntley)*, Seuil, 1995.