

par l'intuition. Ainsi, toute proposition a une «valeur de vérité» (être vraie ou être fausse), que cette valeur ait été établie ou non par les mathématiques ou par un moyen expérimental. Il admettra ultérieurement que cette philosophie a facilité ses intuitions mathématiques.

Observateur attentif et brillant, Gödel s'exprime rarement lors des discussions du Cercle, sauf lorsqu'elles concernent les mathématiques. Timide et solitaire, il a peu d'amis intimes (cependant, il apprécie la compagnie des femmes, qui le trouvent séduisant). Après 1928, il délaisse peu à peu le groupe et s'investit dans un séminaire de mathématiques organisé par Menger. Gödel participe à la publication annuelle des actes ; il publiera ainsi une dizaine d'articles.

UN GÉNIE RÉSERVÉ

C'est l'époque à laquelle Gödel acquiert une réputation internationale en logique mathématique, notamment grâce à deux articles : sa thèse, soutenue à l'Université de Vienne en 1929 et publiée l'année suivante, et son traité *Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés*, publié en allemand en 1931 et présenté comme thèse d'habilitation à l'enseignement en 1932. Dans les *Principia Mathematica* de Bertrand Russell (1872-1970) et d'Alfred Whitehead (1861-1947), les auteurs proposent la logique comme fondement des mathématiques. Ils résolvent un problème posé en 1928, par David Hilbert (1862-1943) et par Wilhelm Ackermann (1896-1962) dans leurs *Fondements de la Logique théorique* : Hilbert et Ackermann y énoncent des règles de manipulation d'expressions logiques composées de connecteurs (et, ou...), de quantificateurs (pour tout, il existe...), et de variables (nombres, propositions, ensembles...). Les règles de manipulation admises ajoutées aux axiomes d'une théorie mathématique permettent-elles de déduire toutes les propositions vraies pour toute structure vérifiant les axiomes ? Plus simplement, peut-on démontrer tout ce qui est vrai pour toutes les interprétations des symboles ?

La réponse attendue était oui, et Gödel le confirme dans sa thèse intitulée *La complétude du calcul des prédicats du premier ordre*, où il établit que les principes de la logique prouvent tout ce qui est vrai à partir d'un ensemble d'axiomes donné. Cependant, il ne démontre pas que les axiomes alors admis pour la théorie des nombres permettent de démontrer toutes les propositions à propos des nombres. Les axiomes de la théorie des nombres avaient été proposés par le

mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932) en 1889 ; ils incluent l'axiome de récurrence, qui affirme que toute propriété vraie pour zéro, et vérifiée par le nombre $n+1$ lorsqu'elle est vraie pour le nombre n , est vraie pour tout entier naturel. Cet axiome semble évident, mais il gêne les mathématiciens parce qu'il concerne les propriétés des nombres plutôt que les nombres eux-mêmes : c'est un axiome du second ordre, qui semble trop éloigné des nombres pour définir ces derniers. De la même manière, savoir qu'un ballon est bleu n'indique pas ce qu'est un ballon.

L'axiome de récurrence avait été reformulé sous la forme d'un groupe infini d'axiomes identiques, qui se rapportaient à des formules spécifiques plutôt qu'aux propriétés générales des nombres. Malheureusement, le logicien norvégien Thoralf Skolem avait démontré que ces axiomes ne caractérisent pas seulement des nombres naturels : ils sont également vérifiés par d'autres structures nommées entiers non standards.

Le théorème de complétude de Gödel indique que l'on peut démontrer toutes les propositions qui découlent des axiomes ; cependant une proposition qui est vraie pour les nombres naturels, mais fausse pour un autre système d'éléments qui vérifient les mêmes axiomes, est alors indémontrable (voir l'encadré). Les mathématiciens dédaignent la restriction en espérant qu'il n'existe pas d'entités similaires aux nombres.

L'article que Gödel publie en 1931 bouleverse alors les mathématiques. Il

montre que certaines propositions vraies pour les nombres naturels sont indémonstrables : il existe des objets qui vérifient les axiomes de la théorie des nombres, mais se comportent différemment à d'autres égards. En prenant toutes les propositions vraies pour axiomes, on contournerait ce «théorème d'incomplétude» ; mais alors comment savoir si les propositions sont vraies ? Gödel montre que, lorsque les axiomes sont décrits par un ensemble de règles mécaniques, le choix des axiomes n'évite pas la difficulté : quand elles sont vraies pour les nombres naturels, d'autres propositions vraies sur ces nombres restent indémonstrables.

Par exemple, lorsque les axiomes ne se contredisent pas mutuellement, cette non-contradiction, correctement codée en une proposition numérique, est formellement indécidable, c'est-à-dire ni démontrable ni réfutable à partir des axiomes. La démonstration de la non-contradiction nécessite donc des principes plus puissants que les axiomes eux-mêmes.

Ce dernier résultat ruine le programme de David Hilbert, qui voulait renforcer les fondements des mathématiques et déduire la cohérence des théories mathématiques complexes de celle de théories plus simples. Pour Gödel, en revanche, les théorèmes d'incomplétude ne réfutent pas l' inanité de la méthode axiomatique, mais ils montrent que la démonstration de théorèmes ne peut être complètement mécanisée et ils justifient l'intuition en mathématique.



2. LE COUPLE ADÈLE PORKERT ET KURT GÖDEL était très uni. Ils sont ici à la terrasse d'un café de Vienne, pendant leurs longues fiançailles. Adèle Porkert protégeait Gödel de ses peurs irrationnelles et était souvent la seule personne à pouvoir le convaincre de manger. Plus que quiconque, elle a contribué à le maintenir en vie et en état de travailler.

Les concepts et les méthodes introduits par Gödel sont au centre de la théorie de la récurrence, centrale en informatique. Ses idées sont à l'origine de nombreux résultats sur les limites des procédures informatiques, par exemple, sur le caractère indécidable de la durée d'exécution des programmes : pour une donnée d'entrée et un programme fixé, un ordinateur s'arrêtera-t-il finalement, en produisant une donnée de sortie, ou finira-t-il dans une boucle infinie ? De même, aucun programme ne peut détecter tous les programmes qui modifient le système d'exploitation d'un ordinateur (les virus, par exemple) sans modifier lui-même ce système.

LE REFUGE AUX ÉTATS-UNIS

Gödel passe l'année universitaire 1933-1934 à l'Institut des études avancées de Princeton, où il enseigne son théorème d'incomplétude. Une «dépression nerveuse» peu après son retour à Vienne

l'empêche d'y retourner l'année suivante. Guéri à l'automne 1935, il part l'année d'après, mais il rechute un mois après son arrivée et ne reprend son enseignement qu'au printemps 1937, à Vienne.

Tant qu'on ne disposera pas du dossier médical de Gödel (il était suivi par un psychiatre de Princeton), la maladie de Gödel restera mystérieuse. Elle commence par une hypocondrie : obsédé par son régime et sa digestion, il note quotidiennement, pendant plus de 20 ans, sa température et sa consommation de magnésie. Il redoute initialement un empoisonnement accidentel, mais, vers la fin de sa vie, il craint qu'on ne veuille le tuer en l'empoisonnant. Il cesse presque de s'alimenter, tandis qu'il prend de nombreuses pilules contre une maladie cardiaque imaginaire.

En dehors des crises aiguës, la capacité de travail de Gödel est peu perturbée par ses problèmes mentaux. Il est soutenu par Adèle Porkert, qu'il a rencontrée dans une boîte de nuit de Vienne, pendant ses études. Son aînée de six ans,

Adèle est catholique, divorcée, danseuse de profession. Les parents de Gödel la jugent dépravée, mais le couple est très uni, et elle l'aide souvent à surmonter sa peur grandissante de l'empoisonnement en jouant le rôle de goûteuse. Ils se marient en septembre 1938, juste avant le retour de Gödel en Amérique, où il doit présenter ses nouveaux résultats en théorie des ensembles à Princeton et à l'Université de Notre-Dame.

Ces résultats résolvent des questions anciennes. À la fin du XIX^e siècle, le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918) a trouvé un moyen de comparer la taille des ensembles infinis : on apparie les éléments de l'ensemble *A* et ceux de l'ensemble *B* ; si cet appariement laisse des éléments de *A* non appariés, alors l'ensemble *A* est plus grand que l'ensemble *B*. Ainsi Cantor a démontré que l'ensemble des nombres naturels est plus petit que l'ensemble des nombres réels. De plus, il a supposé qu'aucun ensemble de taille intermédiaire n'existe : c'est l'hypothèse du continu.

En 1908, Ernst Zermelo (1871-1953), compatriote de Cantor, a formulé une liste d'axiomes pour la théorie des ensembles. Parmi cette liste figure l'axiome du choix, qui stipule que, si l'on considère une collection infinie d'ensembles disjoints, qui contiennent chacun au moins un élément, on peut former un ensemble en retenant un élément de chaque ensemble de la collection. Malgré son apparente évidence, l'axiome du choix a des conséquences paradoxales. Par exemple, si on l'accepte, on doit aussi admettre qu'une sphère est décomposable en un nombre fini de morceaux que l'on peut séparer et rassembler en une nouvelle sphère de volume double de la première.

L'axiome du choix est très controversé : les mathématiciens contemporains de Gödel soupçonnent, à juste titre, que ni l'axiome du choix ni l'hypothèse du continu ne peuvent être déduits des autres axiomes de la théorie des ensembles. Ils craignent que l'utilisation de ces théorèmes dans des démonstrations ne mènent à des contradictions. Cependant, Gödel démontre que les deux axiomes sont cohérents avec les autres.

Les résultats de Gödel en théorie des ensembles répondent à une question posée par Hilbert en 1900 lors du Congrès international des mathématiciens. Malgré leur importance, ils ne lui procurent pas un poste permanent. Pendant son année passée à Princeton et à l'Université de Notre-Dame, son autorisation d'enseigner dans les universités autrichiennes lui est retirée. Pendant l'été 1939, alors qu'il rejoint sa femme à Vienne, il est convoqué pour un examen médical militaire, et déclaré apte au service dans les forces armées nazies.

Les propositions indécidables

Le résultat le plus célèbre de Gödel concerne des propositions sur les nombres naturels, vraies mais indémonstrables dans l'arithmétique. La phrase réflexive suivante est un exemple simple de propositions vraies, mais indécidables, c'est-à-dire ni démontrables ni réfutables :

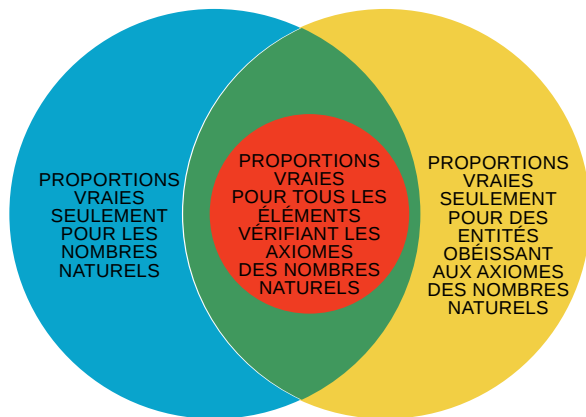
«Cette proposition est indémontrable.»

Elle peut être transformée en un nombre selon une méthode mise au point par Gödel. Ensuite, on montre d'une part que si cette proposition est démontrable, sa négation l'est aussi : elle est donc indémontrable. D'autre part, on prouve qu'elle est néanmoins vraie.

Les équations polynomiales conduisent à des propositions un peu plus compliquées. Par exemple, l'affirma-

tion que certaines équations polynomiales n'ont pas de racines (c'est-à-dire de solutions) entières est indécidable.

Gödel a démontré que les axiomes qui définissent les nombres entiers naturels sont incomplets : certaines propositions vraies de la théorie des nombres sont indémonstrables à l'aide de ces axiomes. Sa démonstration montre, par conséquent, qu'il existe des entités, nommées entiers non standards, différentes des nombres naturels qui obéissent néanmoins à ces axiomes. Comme tout ce qui est démontré à partir des axiomes (*en rouge*) s'applique à toutes les entités qui obéissent aux axiomes, certaines propositions vraies concernant les nombres naturels (*en bleu*, *en vert* et *en rouge*) sont nécessairement indémonstrables (*en bleu et en vert*).



Brian Christie