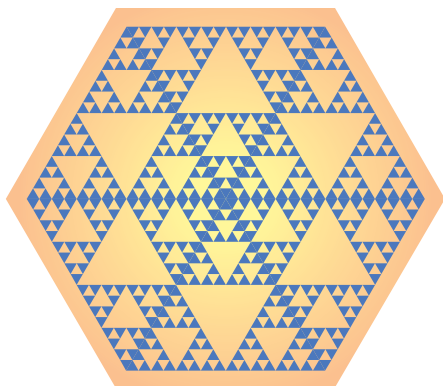




Le triangle omniprésent

IAN STEWART

Une même forme fractale se rencontre dans les tours d'Hanoï et dans le triangle de Pascal.

Les mathématiques fascinent par l'étrangeté de certains nombres, de certaines figures et, plus encore, par des relations étonnantes entre des sujets apparemment indépendants. J'ai ainsi beaucoup de plaisir à retrouver le triangle de Sierpinski (voir la figure 1) là où je ne l'attends pas. Cette forme triangulaire est une fractale : les parties sont des versions réduites du tout. Elle apparaît dans les problèmes d'auto-intersection de courbes, dans le triangle de Pascal, dans le problème des tours d'Hanoï, et elle est liée au curieux nombre rationnel 466/885 (environ 0,52655). Nous verrons que ce nombre mériterait d'être inscrit sur la liste des «nombres qui ont plus d'intérêt qu'il n'y paraît», à côté de π , e , le nombre d'or...

Le mathématicien polonais Waclaw Sierpinski conçoit son triangle en 1915 : partant d'un triangle équilatéral, il supprime le triangle qui joint les milieux des côtés, puis répète le même type de suppression pour les trois triangles restants, et ainsi de suite. La répétition infinie de cette opération conduit à une courbe qui se recoupe en chacun de ses points... ou presque. Les courbes possédant cette étrange propriété géométrique semblaient naguère «pathologiques». Le triangle de Sierpinski ne se recoupe pas aux trois sommets du triangle initial, mais Sierpinski proposa de corriger cette imperfection en assemblant six exemplaires de son triangle en hexagone (voir la figure en haut à gauche) ; chaque point de la courbe obtenue est une ramification. Nathan Cohen, astronome à l'Université de Boston, a récemment construit des antennes aux formes proches du triangle de Sierpinski, afin de mieux récupérer les ondes radio.

En 1890, le mathématicien français Édouard Lucas a trouvé une relation entre le triangle de Sierpinski et le triangle de Pascal, où chaque nom-

bre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui (voir la figure 2). Ces nombres sont aussi les «coefficients du binôme» (les coefficients du polynôme $(a + b)^n$). Le k -ième nombre de la n -ième ligne (les indexations commencent à 0) est aussi le nombre de combinaisons de k objets parmi n objets distincts. Lucas a montré que les coefficients du binôme impairs forment une version discrète du triangle de Sierpinski, c'est-à-dire un stade intermédiaire de sa construction.

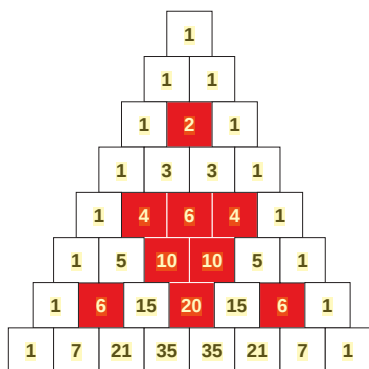
Autrement dit, la plupart des coefficients du binôme sont pairs, puisque ceux-ci occupent toute la surface du triangle initial, tandis que les coefficients impairs sont les points de la courbe. Le quotient du nombre de coefficients impairs par le nombre de coefficients pairs tend vers zéro lorsque le nombre n de lignes augmente. Par ailleurs, David Singmaster, à Londres, a montré que, pour tout entier m , presque tous les coefficients binomiaux sont divisibles par m .

Lucas semble avoir été hanté par le triangle de Sierpinski. En 1883, sous le pseudonyme de M. Claus (une anagramme de Lucas), il fabriqua et vendit le jeu des tours d'Hanoï : sur un socle portant trois tiges, huit disques (ou moins) sont enfilés par ordre décroissant de rayons (voir la figure 3). Le jeu consiste à déplacer les disques un à un, de tige en tige, sans qu'aucun disque repose jamais sur un disque de rayon inférieur ; on doit finalement retrouver les huit disques dans le même ordre sur une autre tige.

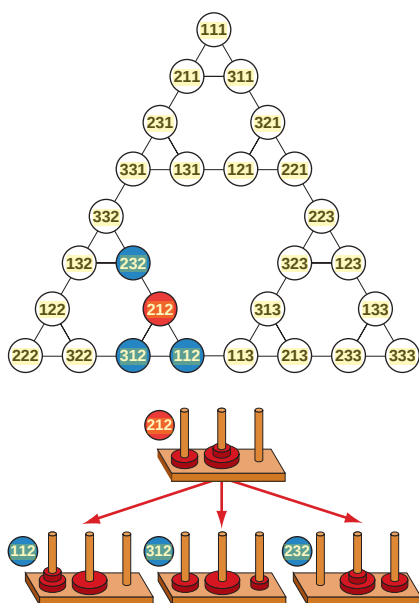
La solution a une structure récurrente : la solution du jeu à $(n + 1)$ disques se déduit de celle du jeu à n disques. Par exemple, pour un jeu à quatre disques, ignorez le grand disque de base et déplacez les trois disques sur une tige libre ; il vous restera alors à déplacer le grand disque sur la tige libre et à déplacer à nouveau les trois disques sur lui.



1. Le triangle de Sierpinski s'obtient quand on élimine des triangles équilatéraux d'un triangle initial.



2. Les nombres impairs du triangle de Pascal dessinent une structure similaire au triangle de Sierpinski.



3. Le graphe des tours d'Hanoï (à gauche) montre tous les mouvements autorisés entre les positions permises de ce jeu. De la position 212 (en rouge), seules les positions 112, 312 et 232 sont accessibles (en bleu). Les mouvements réels sont représentés ci-dessus.

La relation avec le triangle de Sierpinski apparaît lorsque l'on interprète géométriquement cette structure récurrente. Tout problème général avec des objets mobiles et un nombre fini de positions se traduit par un graphe, c'est-à-dire un ensemble de points (sommets) reliés par des segments (arêtes). Le graphe des tours d'Hanoï a pour sommets les positions autorisées des disques, et pour arêtes les mouvements permis entre ces positions. Le graphe d'un jeu à n disques est noté H_n . À quoi ressemble-t-il ? Considérons H_3 (voir la figure 3) et notons les disques 1, 2 et 3, par ordre croissant de taille, et les tiges de gauche à droite par 1, 2 et 3 également. Supposons le disque 1 sur la tige 2, le disque 2 sur la tige 1, et le disque 3 sur la tige 2, donc sous le disque 1. Cette position est représentée par la séquence 212, qui

indique dans l'ordre des disques les tiges qui les portent. À chaque position du jeu correspond une séquence de trois chiffres. Il existe $3^3 = 27$ positions, car chaque disque peut être sur l'une quelconque des tiges, quelles que soient les places des deux autres.

À partir de la position 212, quels sont les mouvements autorisés ? Sur chaque tige, le disque le plus petit est en haut. Par exemple, le disque 2 de la tige 1 ne peut se déplacer sur la tige 2, car il serait au-dessus du disque 1 plus petit : les seuls mouvements possibles sont ceux vers les positions 112, 312 et 232. Le graphe H_3 représente tous les mouvements autorisés à partir des 27 positions permises. Il est composé de trois exemplaires du graphe H_2 (à une rotation près), liés par des arêtes disposées en triangle.

Chaque graphe H_2 est également composé de trois graphes H_1 , où un seul disque est sur l'une des trois tiges. Les arêtes joignant les trois graphes H_2 correspondent aux mouvements du disque le plus grand, tandis qu'à l'intérieur de chacun seuls les deux petits disques se déplacent. Chaque exemplaire du graphe H_2 correspond à une position du grand disque. Plus généralement, un graphe H_n est formé de trois graphes H_{n-1} reliés en triangle. Lorsque n croît, le graphe se rapproche du triangle de Sierpinski.

Le graphe H_n est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant : on en conclut qu'on peut déplacer les disques d'une position à n'importe quelle autre. Un des chemins minimaux de la position initiale (un des sommets du triangle) vers une position finale (un des deux autres sommets) suit un des côtés du graphe et comporte $2^n - 1$ arêtes : le problème des tours d'Hanoï se résout ainsi en, au minimum, $2^n - 1$ mouvements.

À la fin des années 1980, le mathématicien allemand Andreas Hinz a utilisé les tours d'Hanoï pour calculer la distance moyenne entre deux points d'un triangle de Sierpinski. Il a prouvé que, pour un jeu à n disques, le nombre moyen de mouvements entre deux positions tend vers $(466/855)2^n$ lorsque n croît. Avec un triangle dont le côté est égal à une unité, la distance entre deux points est de $466/885$, puisque le produit du nombre moyen de mouvements par la longueur de chaque arête $1/(2^n - 1)$ tend vers $466/885$ quand n tend vers l'infini. A. Hinz a également prouvé que la variance (une grandeur statistique qui mesure la dispersion des données) de la distance entre deux points choisis au hasard dans un triangle de Sierpinski de côté un est précisément $904808318/14448151575$. Vous pouvez aussi ajouter ce nombre à votre liste «des nombres plus intéressants qu'il n'y paraît».



L'intelligence humaine à nouveau dominée?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Une nouvelle catégorie de jeux où la machine «psychologue» apprend à prévoir le comportement des joueurs humains.

La lettre volée d'Edgar Poe décrit le jeu le plus simple du monde, le jeu du *Pair ou impair* : «L'un des deux joueurs tient dans sa main un certain nombre de billes et demande à l'autre : pair ou impair ? Si celui-ci devine, il gagne une bille, sinon il en perd une.»

Dans une variante du jeu, l'un des joueurs place secrètement un objet dans sa main, droite ou gauche, et l'autre joueur tente de deviner dans quelle main est l'objet. Poe nous explique les rudiments tactiques de ce jeu d'anticipation psychologique : «J'ai connu un enfant de huit ans qui, au jeu de *Pair ou impair*, faisait l'admiration universelle. [...] L'enfant dont je parle gagnait toutes les billes de l'école. Naturellement, il avait un mode de divination, lequel consistait dans la simple observation et dans l'appréciation de la finesse de ses adversaires. Supposons que son adversaire soit un parfait nigaud, et, levant sa main fermée, lui demande : pair ou impair ? Notre écolier répond : impair, et il a perdu. Mais à la seconde épreuve, il gagne, car il se dit à lui-même : le niais avait mis pair la première fois, et toute sa ruse ne va consister qu'à lui faire mettre impair à la seconde ; je dirai donc impair.

«Il dit impair, et il gagne. Maintenant, avec un adversaire un peu moins simple, il aurait raisonné ainsi : ce garçon voit que, dans le premier cas, j'ai dit impair, et, dans le second, il se proposera, c'est la première idée qui se présentera à lui, une simple variation de pair à impair comme a fait le premier bête ; mais une seconde réflexion lui dira que c'est là un changement trop simple, et finalement il se décidera à mettre pair comme la première fois. Je dirai donc pair.»

«Il dit pair, et gagne.»

Plus loin, le petit garçon explique sa méthode pour gagner : «Quand je veux savoir jusqu'à quel point quelqu'un est circonspect ou stupide, jusqu'à quel point il est bon ou méchant, ou quelles sont actuellement ses pensées, je compose mon

visage d'après le sien, aussi exactement que possible, et j'attends alors pour savoir quels pensées ou sentiments naîtront dans mon esprit ou dans mon cœur.»

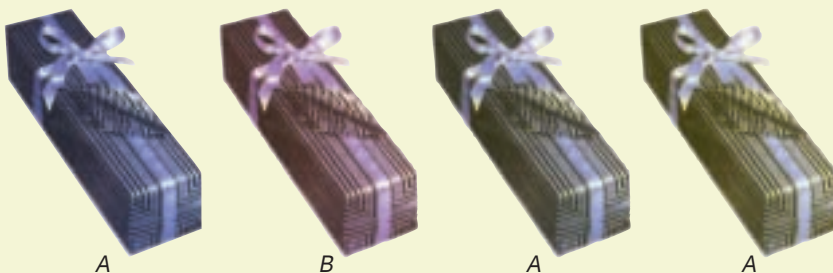
Bien sûr, nul garçon, petit ou grand, ne gagne à tout coup en utilisant cette méthode d'empathie. Il n'empêche qu'à ce jeu, certains obtiennent de bien meilleurs résultats que d'autres. Et les machines ? La capacité de prédire le comportement d'un adversaire peut-elle être insérée dans un programme ?

LES JEUX DE NIM

La question présente un grand intérêt, car elle pose des problèmes peu examinés par les informaticiens et les mathématiciens. Dans les jeux de Nim (Échecs, Dames, Othello, Go, Morpion, etc.), l'information sur la situation est, à chaque instant, entièrement disponible. On sait que, pour chacun de ces jeux, il existe une stratégie optimale pure (c'est-à-dire ne faisant pas intervenir le hasard) ; cette stratégie est calculable lorsque le

1. LA PSYCHOLOGIE HUMAINE DÉVOILÉE

Un ami vous présente quatre boîtes marquées A, B, A, A, et vous dit : dans l'une d'elles, j'ai mis un billet de 100 F. Je ne souhaite pas que tu le trouves, mais si tu ouvres la bonne boîte, il sera à toi.



Laquelle ouvrez-vous ? Vous avez cinq secondes pour choisir.

Si vous avez choisi la troisième boîte, votre comportement est très humain ! Cette expérience, proposée par A. Rubinstein, A. Tversky et D. Heller en 1996, a été testée avec des étudiants par A. Rubinstein. Les résultats sont, dans l'ordre, 16 pour cent, 19 pour cent, 54 pour cent, 11 pour cent. Le biais très fort en faveur de la troisième boîte peut s'analyser de diverses façons, mais sans doute suffit-il de dire que cette troisième boîte apparaît comme « la plus banale », car elle n'est ni sur les bords, ni la seule marquée d'un B ; comme le billet doit être à l'endroit « le plus banal », elle semble la mieux susceptible de convenir. Pourtant, avec les informations disponibles, aucune boîte n'était vraiment favorisée, et l'on aurait dû obtenir une répartition 25 pour cent, 25 pour cent, 25 pour cent. Cette cent. L'esprit humain – partiellement prévisible – favorise l'un des choix. Cette prévisibilité partielle rend difficile à un joueur d'engendrer du hasard quand cela lui serait utile. Les programmes évoqués dans cet article tirent profit de cette faiblesse. Une autre expérience illustre notre difficulté avec le hasard : lorsqu'on demande à une personne un nombre au hasard entre 1 et 9, près de 20 pour cent des gens répondent 7.