



Graphes et chorégraphes

IAN STEWART

Construire des polyèdres avec de la ficelle.

Le jeu de la ficelle intéresse les amateurs de jeux mathématiques, parce qu'il conduit à de remarquables figures géométriques : on passe autour des poignets une boucle de ficelle qu'on manipule ensuite avec les poignets, les doigts ou les dents, afin de reproduire un motif ; parfois on raconte une histoire dont les épisodes sont illustrés par les motifs de la ficelle.

Une théorie mathématique de ces figures est-elle possible ? Plusieurs formalisations des figures réalisées ont été proposées, mais des chorégraphes américains ont fait mieux : ils ont trouvé une relation inattendue entre figures de ficelle, mathématiques et... danse.

Les arts ont souvent recours, implicitement ou explicitement, aux mathématiques : la perspective, en peinture, n'est autre que de la géométrie, tout comme la réalisation de pavages ; la sculpture a

fait usage de rapports entre nombres ; les gammes musicales résultent de divisions astucieuses des intervalles sonores, et les sonneries de cloches font usage des mathématiques combinatoires. Toutefois, à ma connaissance, les mathématiques n'avaient été appliquées à la danse que par mon collègue Christopher Budd, de l'Université de Bath, pour analyser les danses folkloriques anglaises.

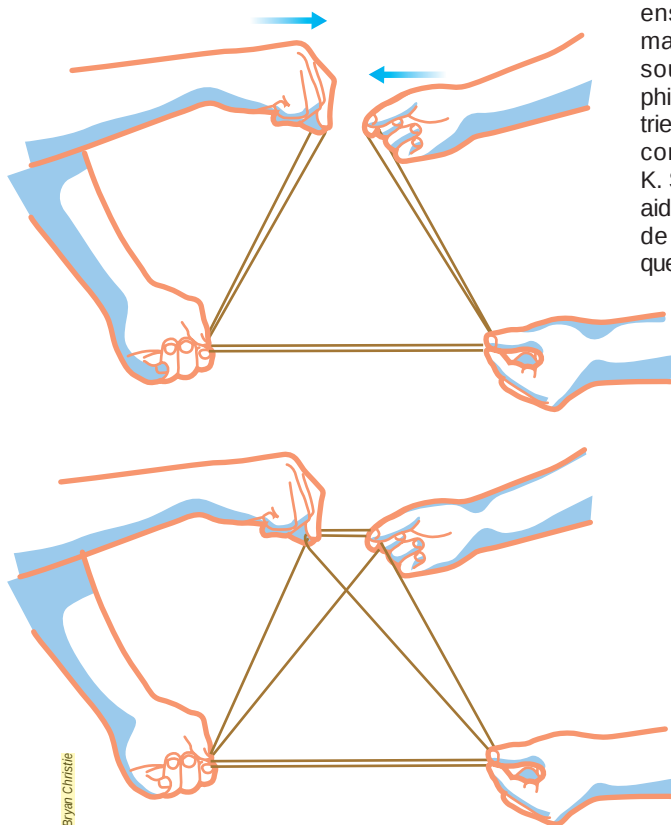
Karl Schaffer, cofondateur d'un ensemble chorégraphique de Santa Cruz, utilise les mathématiques pour créer des danses. Plusieurs de ses spectacles sont fondés sur l'utilisation de boucles de ficelle, avec lesquelles il organise la construction des polyèdres réguliers et d'autres figures mathématiques.

Avec son ami Scott Kim, il s'est initialement intéressé aux figures de ficelle polyédriques, alors qu'ils concevaient un spectacle nommé *Dans la boucle*, à la quête du carré parfait. Cet ensemble de cinq « danses mathématiques » présente, sous une forme chorégraphique, des idées de géométrie et de symétrie. Lors de la conception du spectacle, K. Schaffer et S. Kim se firent aider d'un amateur des figures de ficelle qui leur enseigna quelques danses traditionnelles

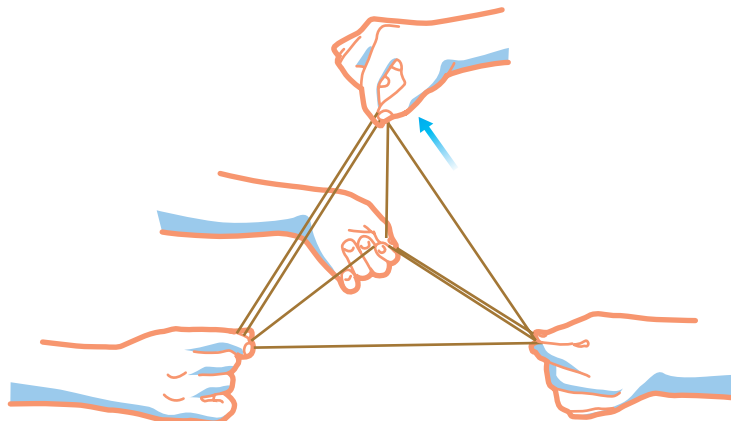
avec figures de ficelle pour deux danseurs. Puis K. Schaffer et S. Kim inventèrent de nouvelles danses fondées sur des structures à trois dimensions, tels les polyèdres.

La figure 1 montre comment deux danseurs peuvent réaliser un tétraèdre, à partir d'une seule boucle de ficelle. Le danseur 1, à gauche, et le danseur 2, à droite, tiennent initialement chacun la boucle en un point, de la main droite, de sorte que leurs mains droites soient reliées par deux brins parallèles. De la main gauche, ils prennent alors les deux brins à une vingtaine de centimètres de la main droite. Simultanément le danseur 1 avance la main droite vers le danseur 2, en la remontant, et le danseur 2 fait un mouvement symétrique. Puis les deux danseurs rassemblent leurs mains droites jusqu'à ce qu'elles se touchent. Chacun utilise alors sa main droite pour prendre un brin de la partie tenue par l'autre danseur, tout en conservant un brin. Le danseur 1 fait alors glisser sa main selon le double brin qu'il tient, prenant la position de la troisième image, et le danseur 2 lève la main droite. Ils obtiennent ainsi un tétraèdre régulier, avec deux arêtes composées de deux brins de ficelle.

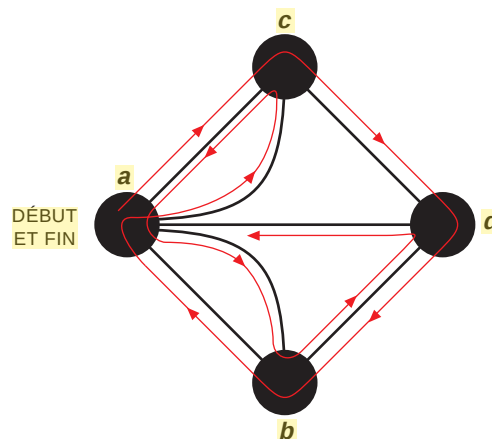
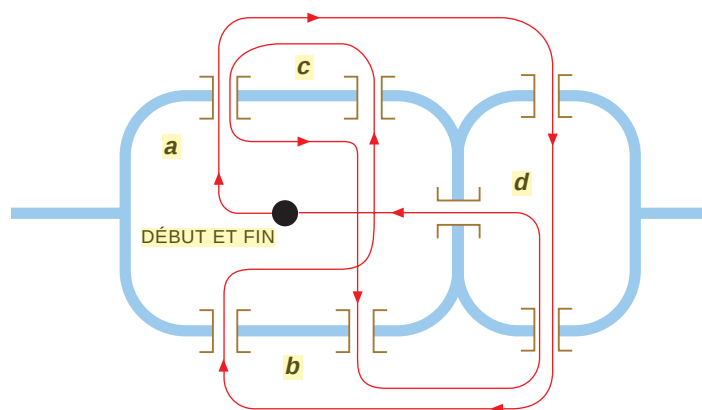
De même, six danseurs tenant six boucles de ficelle ou de caoutchouc peuvent former le cubo-octaèdre, un polyèdre semi-régulier à six faces carrées et



Byron Christie



1. La construction à quatre mains d'un tétraèdre de ficelle.



Byron Christie

2. Le problème des sept ponts de Königsberg et son graphe : les points noirs représentent les masses terrestres, et les arêtes noires, les ponts.

huit faces triangulaires. Une danse encore plus complexe commence avec une seule longue boucle tenue par trois personnes : la boucle a d'abord une forme de triangle, mais elle est ensuite transformée en tétraèdre, puis en octaèdre (un solide à huit faces triangulaires). Puis un quatrième danseur se joint au groupe et participe à la transformation de l'octaèdre en cube. Enfin six danseurs viennent déformer le cube pour obtenir un dodécaèdre (à 12 faces pentagonales), puis un icosaèdre (20 faces triangulaires). Les cinq solides platoniciens (les polyèdres réguliers que sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre) sont ainsi tous représentés.

Ces danses avec des figures de ficelle posent des problèmes qui se rapprochent de ceux qui ont engendré la topologie. Quelles arêtes des polyèdres réalisés doivent-elles être doublées, par exemple ? Ce type de question s'analyse en termes de «cycles eulériens» dans les graphes. Un graphe est un ensemble de points, ou sommets, reliés par des segments, ou arêtes. Un cycle eulérien est un chemin fermé, ou circuit, qui passe une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe (on ne le confondra pas avec un circuit hamiltonien, qui passe une fois et une seule par chaque sommet). On peut représenter une danse par un graphe si l'on fait correspondre des sommets aux mains des participants, et des arêtes aux parties de ficelle qui forment les polyèdres. Certaines des arêtes de polyèdres sont composées de plusieurs brins de ficelle. Pourquoi ? Les danseurs peuvent-ils former les polyèdres avec seulement un brin de ficelle par arête ?

Généralement non. Supposons que l'on forme un polyèdre en n'utilisant qu'une boucle de ficelle. Celle-ci forme un cycle qui passe par tous les sommets du polyèdre. Or, en 1735, le mathématicien suisse Leonhard Euler rencontra une structure

analogue quand il étudia le problème des sept ponts de Königsberg : la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad, en Russie) est construite sur une rivière, la Pregel, et comprend deux îles. À l'époque d'Euler, sept ponts reliaient les îles aux rives ou entre elles (voir la figure 2). On raconte que les habitants avaient cherché pendant longtemps un circuit passant sur chacun de ces ponts une fois et une seule. Euler démontra qu'un tel circuit n'existait pas.

Comment obtint-il ce résultat ? Il considéra d'abord les quatre masses terrestres – les deux îles (a et d) et les deux rives (b et c) –, qu'il associa aux sommets d'un graphe ; puis il associa les sept ponts à des arêtes entre ces sommets. Ayant ainsi transformé le problème en un problème de théorie des graphes, Euler montra que si une boucle passe une fois et une seule par chaque arête, alors un nombre pair d'arêtes arrive à chaque sommet. En effet, comme le chemin considéré est un cycle, chaque fois que la boucle arrive à un sommet par une arête, elle doit le quitter par une autre arête. Les arêtes sont ainsi appariées, et le nombre total d'arêtes reliées à chaque sommet est pair. Cette condition de parité n'est pas vérifiée à Königsberg où, à chaque «sommet»,

arrivent des arêtes en nombre impair (trois ou cinq, selon les sommets).

Euler fit mieux, en démontrant le résultat réciproque : dans tout graphe connexe (c'est-à-dire d'un seul tenant) où chaque sommet est relié à un nombre pair d'arêtes, il existe un circuit qui passe par chaque arête une fois et une seule. Ce théorème explique les arêtes doublées dans les danses avec de la ficelle.

Considérons, par exemple, le dodécaèdre, à 20 sommets reliés par 30 arêtes. Comme trois arêtes (un nombre impair) arrivent à chaque sommet, il n'existe pas de circuit qui passe par chaque arête une fois et une seule. En revanche, quand une de ces trois arêtes est «doublée», quatre arêtes (un nombre pair) arrivent à chaque sommet. Pouvez-vous identifier dix arêtes telles que, si on les double, quatre arêtes arrivent à chaque sommet ? Sinon, vous pourriez les doubler toutes : six arêtes arriveraient alors à chaque sommet. Mais un si grand nombre est-il nécessaire ?

Comme cet exemple le montre, les danses avec des figures de ficelle peuvent constituer d'instructives introductions à la géométrie dans l'espace à trois dimensions. Ce sont aussi des jeux très amusants : essayez-les la prochaine fois que vous serez dans une réunion ennuyeuse.

Réactions

Dans mon article intitulé *Chœurs lumineux* (Pour la Science, mai 1999), je demandais si, dans le Jeu du flash, on pourrait trouver des configurations qui, au lieu d'évoluer vers un synchronisme des lucioles, aboutiraient à des cycles, les jetons étant répartis sur plusieurs cases. Cette situation n'a pas lieu dans le modèle mathématique de la synchronisation des lucioles, mais elle se rencontre dans le Jeu du flash, qui est discontinu. William Evans, d'Irvine, a découvert que si le damier a douze

cases de côté, avec cinq lucioles, une position initiale (ci-dessous à gauche) évolue, après 27 coups, vers une seconde configuration (à droite) qui se répète avec une période égale à 38 coups.

