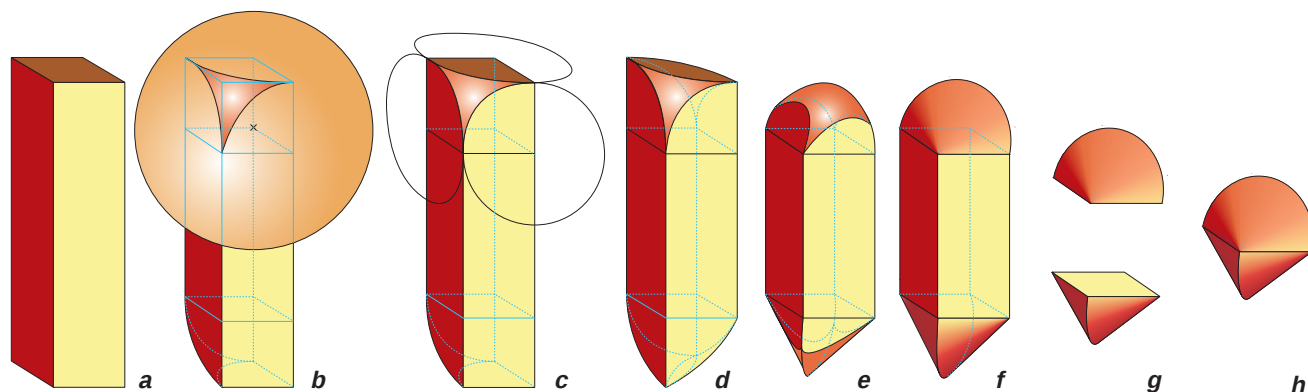




2. À partir d'une longueur de bois à section carrée (a), on peut fabriquer un sphérocône : à chaque extrémité, on taille un coin selon l'intersection avec une sphère (b et c) ; on taille ensuite les deux coins opposés aux précédents (d) ; puis on arrondit les

quatre coins restés intacts jusqu'à obtenir, à chaque extrémité de la pièce de bois, un demi-cercle qui joint deux sommets opposés de la section carrée (e et f) ; on élimine alors le bois central (g) et on colle les deux morceaux.

l'autre. Intrigué, je questionnai ce lecteur qui, en guise de réponse, m'expédia une énorme boîte en carton d'une légèreté surprenante : elle contenait un réseau d'environ 50 sphérocônes soigneusement assemblés. Ce réseau est régulier : sa structure peut se répéter indéfiniment dans les trois dimensions de l'espace.

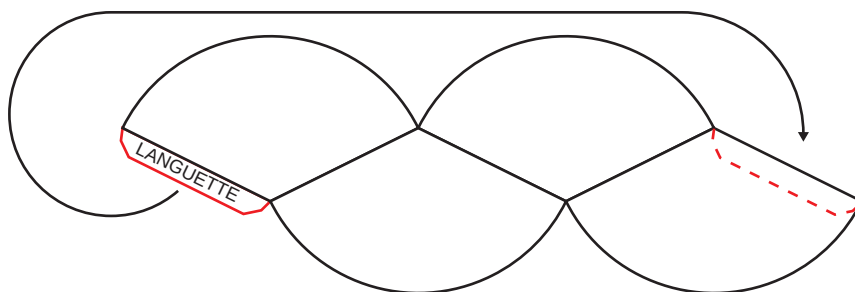
Les remarquables propriétés du sphérocône résultent de la possibilité de l'inscrire dans un réseau cubique : ses quatre arêtes – qui séparent les quatre secteurs – appartiennent à un octaèdre régulier (les quatre autres sont les bissectrices de chaque secteur), dont les sommets sont les centres des six faces d'un cube.

Âgé de 47 ans, C. Roberts a inventé le sphérocône il y a 30 ans. Devenu menuisier, il a taillé son premier sphérocône dans du bois. Le ruban de Möbius, formé d'un ruban de papier dont on colle les deux extrémités après avoir tourné l'une d'elles de 180 degrés, est à l'origine de l'idée du sphérocône. Quelle que soit sa finesse, le papier a une épaisseur : une section transverse du ruban est donc un rectangle allongé. Avec une section carrée, les extrémités pourront être collées après une rotation de seulement 90 degrés : le volume ainsi obtenu est un anneau qui a une seule face. Existait-il un volume sans trou et dont la surface soit une unique face ? Alors qu'il travaillait une longueur de bois à section carrée, C. Roberts a cherché à relier sans arête l'extrémité de deux des faces rectangulaires adjacentes. La même opération pour les deux autres faces rectangulaires permet d'obtenir un demi-cercle qui joint les extrémités d'une diagonale de la section carrée (voir la figure 2f). Le passage d'une face rectangulaire à l'autre rappelle les virages relevés des vélodromes. Après avoir répété le même procédé à l'autre extrémité de la pièce de bois en suivant une diagonale perpendiculaire à la précédente,

l'élimination du bois superflu entre les deux extrémités donne naissance à un... sphérocône (voir la figure 2h).

Il en a taillé un dans du bois d'acajou (*Swietenia mahagoni*), et il l'a offert à sa sœur, qui l'a encore. Le volume disparut de sa mémoire jusqu'en 1997, où il m'a vu donner des conférences télévisées sur la symétrie.

Mentionnons, pour terminer, que deux sphérocônes peuvent rouler l'un sur l'autre ; quatre sphérocônes arrangés en carré peuvent également rouler les uns sur les autres ; huit sphérocônes peuvent parcourir un neuvième sphérocône placé au centre... Les combinaisons semblent infinies, je laisse le soin au lecteur d'en explorer les possibilités.



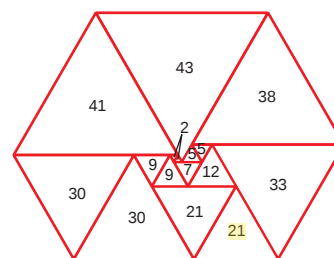
3. LA CONSTRUCTION du sphérocône est facile quand on suit ce patron. Après avoir découpé cette forme (agrandie !) dans du carton, on colle la languette et on joint les bords des demi-cônes.

Réactions

La correspondance qui a suivi l'article «La quadrature du carré» (voir *Pour la Science*, octobre 1997) n'est pas encore terminée. Par exemple, Robert Wainwright demande quelle est la plus grande aire convexe, c'est-à-dire sans angle rentrant, qui peut être pavée par des triangles équilatéraux à côtés entiers sans diviseurs communs. D'autres lettres annoncent vos résultats, notamment des pavages d'aire égale à 4 751 (celle du plus petit triangle possible est égale à l'unité), puis à 4 782 par 15 triangles.

En 1998, par inadvertance, j'ai négligé le pavage par 15 triangles d'une aire égale à 5 114, proposé par John Layman, de l'Institut polytechnique de Virginie, plus grand que tous ceux que j'avais repro-

duits ! (Je lui présente ici mes excuses. Je dois sans doute améliorer mon système de classement.) Plus récemment, J. Layman a trouvé un pavage d'aire 9 158 avec 16 triangles (voir la figure, les chiffres indiquent la longueur d'un côté), un d'aire 16 655 avec 17 triangles et un d'aire 29 214 avec 18 triangles.





Les propositions indécidables

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'incomplétude gödelienne concerne-t-elle d'autres domaines que les mathématiques ?

En 1931, le logicien Kurt Gödel prouvait un théorème révolutionnaire qui démontrait que les mathématiques sont plus profondes que les mathématiciens ne l'imaginaient. Toute tentative pour définir de qu'est une preuve échoue nécessairement à cause des propositions dites indécidables (on ne peut déterminer ni leur vérité, ni leur fausseté) qui se glissent dans tout système.

Imaginez l'émoi que ce résultat aurait dû susciter : assez paradoxalement toutefois, l'incomplétude et l'indécidabilité gödelienne engendrent un intérêt considérable chez nombre de ceux qu'elles ne concernent pas vraiment (ou seulement à titre de vagues métaphores) et une indifférence aveugle chez les mathématiciens, qui devraient en être troublés. Nous allons examiner le théorème de Gödel et l'importance qu'il devrait avoir.

L'AXIOME DES PARALLÈLES

L'exemple le plus simple d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité est ancienne : c'est la géométrie qui découle de l'axiome des parallèles. L'affaire remonte aux *Éléments* d'Euclide, qui furent écrits vers 300 avant J.-C. et qui rapportaient des résultats mathématiques plus anciens encore. Euclide y développe une conception axiomatique de la géométrie : il énumère les propriétés primitives des objets points, droites, plans, etc., qu'il accepte sans démonstration (ce sont les axiomes et postulats). Toute la géométrie n'est plus alors qu'une question de raisonnement pur, de déduction logique.

La présentation d'Euclide ne décrit pas les règles de raisonnement autorisées (elles n'ont été comprises qu'au

cours du XIX^e siècle). Euclide ignore les notations qui, aujourd'hui, facilitent l'exposé des démonstrations et leurs vérifications ; pour rendre plus aisée la lecture, l'axiomatisation de la géométrie que nous évoquons ici prend en compte les progrès faits par la méthode axiomatique.

Parmi les propriétés posées par Euclide, la pierre d'achoppement est l'axiome des parallèles (ou cinquième postulat d'Euclide), qui énonce :

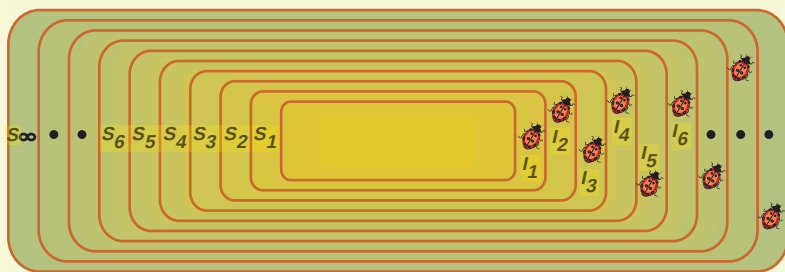
Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P, alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' contenant P et ne rencontrant pas D (la droite D' est dénommée la parallèle à D passant par P).

La question s'est posée très tôt : pouvait-on déduire cet axiome des autres axiomes, en apparence plus naturels ? On a longtemps pensé que cela devait être possible. Hélas, toutes les tentatives échouèrent pour prouver l'axiome des parallèles à partir des autres axiomes. Avec la maturité des méthodes logiques, on a fini par démontrer en 1868 que l'énoncé des parallèles ne se déduisait pas des autres axiomes : aujourd'hui, il est donc inutile d'essayer de le «prouver»!

Il s'agit bien là d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité : la géométrie euclidienne sans l'axiome des parallèles, dénommée *géométrie absolue*, est incomplète. Quelle que soit la longueur des raisonnements qu'on fasse, on ne peut déduire de la géométrie absolue, ni l'axiome des parallèles ni sa négation (c'est-à-dire l'affirmation qu'il n'est pas vérifié). Vis-à-vis de la géométrie absolue, l'axiome des parallèles est indécidable.

Même si la preuve de cette indécidabilité a joué un rôle important dans la compréhension de la nature de l'espace physique, la conclusion qu'on en tire n'est pas très grave sur le plan mathématique. On la formule ainsi : la géométrie absolue n'est pas la théorie de l'espace, car la géométrie absolue n'est que le socle

1. ON N'ÉCHAPPE PAS AU THÉORÈME DE GÖDEL



Si un système formel permet de faire de l'arithmétique et qu'il est consistant (c'est-à-dire qu'il ne se contredit pas), alors il existe des énoncés I dont S ne peut démontrer ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux (on les appelle des indécidables de S).

Le théorème de Gödel permet de construire explicitement un tel indécidable I (sa démonstration est fondée sur l'écriture d'un énoncé codant dans S l'affirmation : "je ne suis pas démontrable dans S ").

Une idée naturelle vient à l'esprit : partant d'un système S_1 , on construit un tel indécidable I_1 et on l'ajoute à S_1 comme nouvel axiome, ce qui donne un nouveau système S_2 dans lequel bien sûr I_1 n'est plus indécidable.

Puisque le théorème de Gödel appliqué à S_2 nous permet d'obtenir un autre indécidable I_2 on l'ajoute aux axiomes de S_2 , ce qui conduit à un nouveau système S_3 . Etc.

Les systèmes emboîtés S_1, S_2, S_3 , etc., sont de plus en plus puissants (ils comportent de moins en moins d'indécidables). À l'infini, ils fournissent un nouveau système formel S_∞ . Malheureusement, ce système comporte encore des indécidables ! On n'échappe pas si facilement au théorème de Gödel.