



Les propositions indécidables

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'incomplétude gödelienne concerne-t-elle d'autres domaines que les mathématiques ?

En 1931, le logicien Kurt Gödel prouvait un théorème révolutionnaire qui démontrait que les mathématiques sont plus profondes que les mathématiciens ne l'imaginaient. Toute tentative pour définir de qu'est une preuve échoue nécessairement à cause des propositions dites indécidables (on ne peut déterminer ni leur vérité, ni leur fausseté) qui se glissent dans tout système.

Imaginez l'émoi que ce résultat aurait dû susciter : assez paradoxalement toutefois, l'incomplétude et l'indécidabilité gödelienne engendrent un intérêt considérable chez nombre de ceux qu'elles ne concernent pas vraiment (ou seulement à titre de vagues métaphores) et une indifférence aveugle chez les mathématiciens, qui devraient en être troublés. Nous allons examiner le théorème de Gödel et l'importance qu'il devrait avoir.

L'AXIOME DES PARALLÈLES

L'exemple le plus simple d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité est ancienne : c'est la géométrie qui découle de l'axiome des parallèles. L'affaire remonte aux *Éléments* d'Euclide, qui furent écrits vers 300 avant J.-C. et qui rapportaient des résultats mathématiques plus anciens encore. Euclide y développe une conception axiomatique de la géométrie : il énumère les propriétés primitives des objets points, droites, plans, etc., qu'il accepte sans démonstration (ce sont les axiomes et postulats). Toute la géométrie n'est plus alors qu'une question de raisonnement pur, de déduction logique.

La présentation d'Euclide ne décrit pas les règles de raisonnement autorisées (elles n'ont été comprises qu'au

cours du XIX^e siècle). Euclide ignore les notations qui, aujourd'hui, facilitent l'exposé des démonstrations et leurs vérifications ; pour rendre plus aisée la lecture, l'axiomatisation de la géométrie que nous évoquons ici prend en compte les progrès faits par la méthode axiomatique.

Parmi les propriétés posées par Euclide, la pierre d'achoppement est l'axiome des parallèles (ou cinquième postulat d'Euclide), qui énonce :

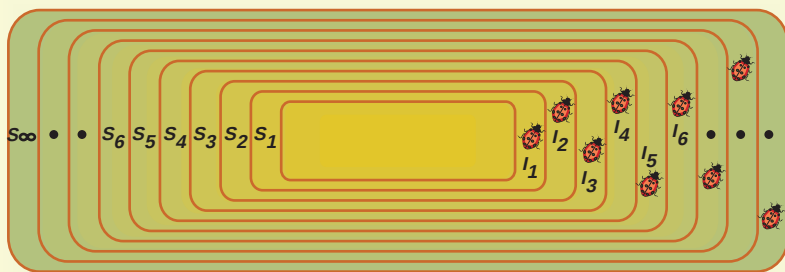
Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P, alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' contenant P et ne rencontrant pas D (la droite D' est dénommée la parallèle à D passant par P).

La question s'est posée très tôt : pouvait-on déduire cet axiome des autres axiomes, en apparence plus naturels ? On a longtemps pensé que cela devait être possible. Hélas, toutes les tentatives échouèrent pour prouver l'axiome des parallèles à partir des autres axiomes. Avec la maturité des méthodes logiques, on a fini par démontrer en 1868 que l'énoncé des parallèles ne se déduisait pas des autres axiomes : aujourd'hui, il est donc inutile d'essayer de le «prouver»!

Il s'agit bien là d'une situation d'incomplétude et d'indécidabilité : la géométrie euclidienne sans l'axiome des parallèles, dénommée *géométrie absolue*, est incomplète. Quelle que soit la longueur des raisonnements qu'on fasse, on ne peut déduire de la géométrie absolue, ni l'axiome des parallèles ni sa négation (c'est-à-dire l'affirmation qu'il n'est pas vérifié). Vis-à-vis de la géométrie absolue, l'axiome des parallèles est indécidable.

Même si la preuve de cette indécidabilité a joué un rôle important dans la compréhension de la nature de l'espace physique, la conclusion qu'on en tire n'est pas très grave sur le plan mathématique. On la formule ainsi : la géométrie absolue n'est pas la théorie de l'espace, car la géométrie absolue n'est que le socle

1. ON N'ÉCHAPPE PAS AU THÉORÈME DE GÖDEL



Si un système formel permet de faire de l'arithmétique et qu'il est consistant (c'est-à-dire qu'il ne se contredit pas), alors il existe des énoncés *I* dont *S* ne peut démontrer ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux (on les appelle des indécidables de *S*).

Le théorème de Gödel permet de construire explicitement un tel indécidable *I* (sa démonstration est fondée sur l'écriture d'un énoncé codant dans *S* l'affirmation : "je ne suis pas démontrable dans *S*").

Une idée naturelle vient à l'esprit : partant d'un système *S*₁, on construit un tel indécidable *I*₁ et on l'ajoute à *S*₁ comme nouvel axiome, ce qui donne un nouveau système *S*₂ dans lequel bien sûr *I*₁ n'est plus indécidable.

Puisque le théorème de Gödel appliqué à *S*₂ nous permet d'obtenir un autre indécidable *I*₂ on l'ajoute aux axiomes de *S*₂, ce qui conduit à un nouveau système *S*₃. Etc.

Les systèmes emboîtés *S*₁, *S*₂, *S*₃, etc., sont de plus en plus puissants (ils comportent de moins en moins d'indécidables). À l'infini, ils fournissent un nouveau système formel *S*_∞. Malheureusement, ce système comporte encore des indécidables ! On n'échappe pas si facilement au théorème de Gödel.

commun à plusieurs géométries possibles que l'on définit en ajoutant à la géométrie absolue, soit l'axiome des parallèles, soit un autre axiome. Parmi les différentes géométries possibles obtenues en complétant la géométrie absolue, c'est aux physiciens de dire celle qui leur convient le mieux pour représenter l'espace.

Être incomplet, pour un système formel (comme celui de la géométrie euclidienne), c'est laisser certaines propositions en suspens : un système incomplet est un système où l'on ne peut prouver ni la vérité ni la fausseté d'énoncés qu'il permet pourtant de formuler. Un indécidable d'un système incomplet, c'est un énoncé pour lequel le système ne sait rien dire.

L'incomplétude de la géométrie absolue traduit simplement un oubli dans les axiomes : depuis des siècles, de nombreux mathématiciens croyaient que l'axiome des parallèles pouvait se déduire des autres, ils se trompaient. En voilà une affaire !

Bien des problèmes restent ouverts concernant l'indécidabilité de problèmes simples, y compris lorsqu'ils ont été résolus dans un cadre particulier. Par exemple, la démonstration du grand théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1994 s'est faite dans le cadre de la théorie des ensembles – ce théorème n'est pas un indécidable de la théorie des ensembles, mais savoir s'il s'agit d'un indécidable de l'arithmétique est une question difficile et non résolue dont nous verrons la pertinence.

EN ATTENDANT GÖDEL...

Les phénomènes d'indécidabilité et d'incomplétude (même si, dans le passé, les mathématiciens n'utilisaient pas ces termes) sont présents dans les mathématiques depuis toujours. Ce qui a changé en 1931, avec les fameux résultats de Kurt Gödel, c'est qu'il est aujourd'hui prouvé que ces phénomènes – contrairement à ce qu'on pensait – sont universels : toute théorie d'un certain niveau y est assujettie. D'aucuns ont cru déduire de cette universalité que l'indécidabilité était inquiétante. D'autres, sans contester la justesse des résultats de Gödel, soutiennent à l'opposé qu'on ne doit pas s'en préoccuper, et donc, en quelque sorte, que la situation des mathématiques est désespérée, mais pas grave.

Un exemple simplissime de système formel est indiqué dans l'encadré 3. Les logiciens affirment qu'un système formel est consistant (ou cohérent, ou non contradictoire) quand il est impossible d'y démontrer une proposition et sa négation (autrement dit, le système ne se contredit pas). Dans le

2. L'AXIOME DES PARALLÈLES EST INDÉCIDABLE

Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P , alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' , contenant P et ne rencontrant pas D .

Cette formulation de l'axiome des parallèles n'est pas exactement celle d'Euclide. Il utilisait l'énoncé équivalent : si deux droites, coupées par une sécante, forment des angles intérieurs d'un même côté dont la somme est inférieure à deux droits, ces droites se coupent.

D'autres formulations équivalentes sont : si une droite D coupe une droite, elle coupe aussi toutes les droites parallèles à D (axiome de Proclus) ; la somme des angles d'un triangle vaut deux droits ; la surface d'un triangle peut être aussi grande qu'on veut. La terminologie du *cinquième postulat d'Euclide* ou *postulat des parallèles*, est trompeuse, car chez Euclide certaines définitions cachent des axiomes.

Dans la présentation moderne de l'axiomatisation de la géométrie – étudiée par David Hilbert –, il y a bien plus de cinq postulats-axiomes fondamentaux.

La première démonstration que l'axiome des parallèles est indécidable dans la géométrie absolue est due à Eugenio Beltrami en 1868. Il prouva que la géométrie elliptique (ou de Riemann) est consistante si la géométrie euclidienne l'est. Dans cette géométrie, par un point ne passe pas forcément de droite parallèle à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Il appelle point un couple de points diamétralement opposés et droite un cercle sur la sphère de diamètre maximum. Avec ce vocabulaire redéfini, il constate que les axiomes de la géométrie sont vérifiés. Par exemple : par deux points (au sens nouveau) distincts passe une droite (au sens nouveau) unique. Le seul axiome qui n'est pas satisfait est celui des parallèles : une droite D étant donnée, ainsi qu'un point P à l'extérieur de cette droite, toute droite D' passant par P coupe D .

Une autre version de la démonstration de l'impossibilité de déduire l'axiome des parallèles des autres axiomes est due au grand mathématicien français Henri Poincaré. On prend un disque (sans sa circonférence) et on appelle droite les arcs de cercle situés dans ce disque qui coupent orthogonalement le bord du disque. Dans cette géométrie hyperbolique (ou de Lobachevski), par un point donné passent plusieurs droites parallèles à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits (elle est éventuellement nulle). Cette géométrie a inspiré de magnifiques œuvres au graveur Maurits Escher.

Les mathématiciens utilisent aujourd'hui des dessins "à la Escher" pour visualiser les propriétés de la géométrie hyperbolique.

