

commun à plusieurs géométries possibles que l'on définit en ajoutant à la géométrie absolue, soit l'axiome des parallèles, soit un autre axiome. Parmi les différentes géométries possibles obtenues en complétant la géométrie absolue, c'est aux physiciens de dire celle qui leur convient le mieux pour représenter l'espace.

Être incomplet, pour un système formel (comme celui de la géométrie euclidienne), c'est laisser certaines propositions en suspens : un système incomplet est un système où l'on ne peut prouver ni la vérité ni la fausseté d'énoncés qu'il permet pourtant de formuler. Un indécidable d'un système incomplet, c'est un énoncé pour lequel le système ne sait rien dire.

L'incomplétude de la géométrie absolue traduit simplement un oubli dans les axiomes : depuis des siècles, de nombreux mathématiciens croyaient que l'axiome des parallèles pouvait se déduire des autres, ils se trompaient. En voilà une affaire !

Bien des problèmes restent ouverts concernant l'indécidabilité de problèmes simples, y compris lorsqu'ils ont été résolus dans un cadre particulier. Par exemple, la démonstration du grand théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1994 s'est faite dans le cadre de la théorie des ensembles – ce théorème n'est pas un indécidable de la théorie des ensembles, mais savoir s'il s'agit d'un indécidable de l'arithmétique est une question difficile et non résolue dont nous verrons la pertinence.

EN ATTENDANT GÖDEL...

Les phénomènes d'indécidabilité et d'incomplétude (même si, dans le passé, les mathématiciens n'utilisaient pas ces termes) sont présents dans les mathématiques depuis toujours. Ce qui a changé en 1931, avec les fameux résultats de Kurt Gödel, c'est qu'il est aujourd'hui prouvé que ces phénomènes – contrairement à ce qu'on pensait – sont universels : toute théorie d'un certain niveau y est assujettie. D'aucuns ont cru déduire de cette universalité que l'indécidabilité était inquiétante. D'autres, sans contester la justesse des résultats de Gödel, soutiennent à l'opposé qu'on ne doit pas s'en préoccuper, et donc, en quelque sorte, que la situation des mathématiques est désespérée, mais pas grave.

Un exemple simplissime de système formel est indiqué dans l'encadré 3. Les logiciens affirment qu'un système formel est consistant (ou cohérent, ou non contradictoire) quand il est impossible d'y démontrer une proposition et sa négation (autrement dit, le système ne se contredit pas). Dans le

2. L'AXIOME DES PARALLÈLES EST INDÉCIDABLE

Si P est un point donné et si D est une droite ne contenant pas P , alors dans le plan déterminé par P et D il existe une droite unique D' , contenant P et ne rencontrant pas D .

Cette formulation de l'axiome des parallèles n'est pas exactement celle d'Euclide. Il utilisait l'énoncé équivalent : si deux droites, coupées par une sécante, forment des angles intérieurs d'un même côté dont la somme est inférieure à deux droits, ces droites se coupent.

D'autres formulations équivalentes sont : si une droite D coupe une droite, elle coupe aussi toutes les droites parallèles à D (axiome de Proclus) ; la somme des angles d'un triangle vaut deux droits ; la surface d'un triangle peut être aussi grande qu'on veut. La terminologie du

cinquième postulat d'Euclide ou *postulat des parallèles*, est trompeuse, car chez Euclide certaines définitions cachent des axiomes. Dans la présentation moderne de l'axiomatisation de la géométrie – étudiée par David Hilbert –, il y a bien plus de cinq postulats-axiomes fondamentaux.

La première démonstration que l'axiome des parallèles est indécidable dans la géométrie absolue est due à Eugenio Beltrami en 1868. Il prouva que la géométrie elliptique (ou de Riemann) est consistante si la géométrie euclidienne l'est. Dans cette géométrie, par un point ne passe pas forcément de droite parallèle à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Il appelle point un couple de points diamétralement opposés et droite un cercle sur la sphère de diamètre maximum. Avec ce vocabulaire redéfini, il constate que les axiomes de la géométrie sont vérifiés. Par exemple : par deux points (au sens nouveau) distincts passe une droite (au sens nouveau) unique. Le seul axiome qui n'est pas satisfait est celui des parallèles : une droite D étant donnée, ainsi qu'un point P à l'extérieur de cette droite, toute droite D' passant par P coupe D .

Une autre version de la démonstration de l'impossibilité de déduire l'axiome des parallèles des autres axiomes est due au grand mathématicien français Henri Poincaré. On prend un disque (sans sa circonférence) et on appelle droite les arcs de cercle situés dans ce disque qui coupent orthogonalement le bord du disque. Dans cette géométrie hyperbolique (ou de Lobachevski), par un point donné passent plusieurs droites parallèles à une droite donnée, et la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits (elle est éventuellement nulle). Cette géométrie a inspiré de magnifiques œuvres au graveur Maurits Escher.

Les mathématiciens utilisent aujourd'hui des dessins "à la Escher" pour visualiser les propriétés de la géométrie hyperbolique.

