

cadre de la logique usuelle, dès qu'un système peut démontrer  $P$  et non- $P$  (une proposition et sa négation), alors il peut tout démontrer. C'est pourquoi l'insistance est crainte et bannie.

Le résultat de Kurt Gödel de 1931, qui universalise l'incomplétude déjà connue pour la géométrie absolue, se décompose en deux parties. La première indique que tout système formel permettant de faire de l'arithmétique (la théorie élémentaire des nombres entiers) est soit inconsistent (donc inintéressant, puisque tout y est vrai et faux à la fois), soit incomplet (donc insatisfaisant, puisque le système laisse en suspens certains énoncés).

Autrement dit : tout système formel, à la fois assez puissant pour l'arithmétique élémentaire et consistant contient des indécidables. La seconde partie des résultats de 1931 (ou second théorème de Gödel) indique que justement l'énoncé qui affirme qu'un système est consistant est l'un des indécidables de ce système, ce que l'on traduit simplement en disant qu'un système consistant ne peut savoir qu'il l'est. Une démonstration de ce théorème due à Georges Boolos est présentée sur le site Internet de *Pour la Science*.

Insistons sur le fait que ces résultats n'indiquent pas qu'il existe des

indécidables absolus (c'est-à-dire définitivement indémonstrables dans tout système formel), mais indique que, pour chaque système formel particulier (assez puissant et consistant), il y a au moins un indécidable  $I$ .

Si vous repérez un indécidable pour un système  $S$  auquel vous ajoutez le nouvel axiome  $I$ , vous créez un système  $S'$  où  $I$  n'est plus indécidable. Fort bien, mais avez-vous par là véritablement progressé ? Hélas, guère : le théorème de Gödel s'applique alors au nouveau système  $S'$ , et donc il existe au moins un indécidable  $I'$  de  $S'$  ( $I'$  est bien sûr aussi un indécidable de  $S$ ). Si vous ajoutez  $I'$  aux axiomes de  $S'$ , vous obtenez un système  $S''$  qui contiendra un indécidable  $I''$ , etc.

Ceux qui interprètent le phénomène de l'indécidabilité comme établissant que les mathématiques sont incomplètes se trompent : un système particulier qui n'accède pas à une certaine vérité mathématique peut toujours être complété pour y accéder.

Un piège existe, piège que nous allons détailler pour assimiler le sens du théorème de Gödel. Le mathématicien n'est jamais effrayé par l'infini et, devant les systèmes  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ , etc., il se dit qu'il suffit d'ajouter jusqu'à l'infini les indécidables qu'on trouve et qu'on obtiendra alors un système complet.

## UNE MÉTHODE DE COMPLÉTION INEFFECTIVE

Si ce mathématicien s'y prend trop naïvement, il ne réussira pas car, même après avoir ajouté  $I$ ,  $I'$ ,  $I''$ , etc. jusqu'à l'infini, le système obtenu contiendra encore des indécidables (on sait le démontrer). L'impossibilité est analogue avec les tentatives d'énumération des nombres entiers : ce n'est pas parce que vous prenez une infinité d'entiers (par exemple, les entiers pairs, 2, 4, 6, 8, ...) que vous prenez tous les entiers. Similairement, ce n'est pas parce que vous ajoutez une infinité d'indécidables à  $S$  qu'il n'y en a plus.

Après un moment de réflexion, le mathématicien propose une autre idée un peu plus subtile. Il dit :

– Je numérote toutes les formules ayant un sens dans mon système  $S = S_0 : f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$  (une telle numérotation est possible pour des formules).

– Je les prends une à une en ajoutant comme nouveaux axiomes celles qui sont encore indécidables au moment où je les considère : à l'étape  $n$  du processus de complétion, j'arrive à un certain système  $S_n$ , je regarde  $f_n$  ; si c'est un indécidable de  $S_n$ , j'ajoute  $f_n$  à  $S_n$  pour obtenir  $S_{n+1}$ , sinon je conserve le même  $S_n : S_{n+1} = S_n$ .

### 3. UN EXEMPLE DE SYSTÈME FORMEL

Dans un système formel (ou système de démonstrations), on détaille successivement ce que sont les formules, les axiomes, les règles d'inférence. Examinons un exemple de système formel, dont la signification sera donnée par la suite.

**Formules** : des bâtons | suivis du symbole  $\oplus$ , puis à nouveau des bâtons, puis le symbole  $=$ , puis encore des bâtons, ou la même chose précédée de un ou plusieurs NON.

Exemples :  $||||| \oplus ||||| = |||||$  ; NON  $||||| \oplus ||||| = |||||$

**Axiomes** : Toutes les formules sans NON où le nombre de bâtons des trois paquets est le même.

Exemple :  $||||| \oplus ||||| = |||||$

**Règles d'inférence** :

– **règle A** : on permute les deux paquets devant le  $=$ .

Exemple : de  $||||| \oplus ||||| = |||||$ , on déduit  $||||| = ||||| \oplus |||||$

– **règle B** : on ajoute au paquet entre  $\oplus$  et  $=$  le nombre de bâtons qu'il y a dans le paquet à gauche de  $\oplus$ .

Exemple : de  $||||| \oplus ||||| = |||||$ , on déduit  $||||| \oplus ||||| = |||||$

– **règle C** : on ajoute ou on soustrait au moins un des bâtons du paquet derrière  $=$  et on fait précéder le tout de NON.

Exemple : de  $||||| \oplus ||||| = |||||$ , on déduit : NON  $||||| \oplus ||||| = |||||$

– **règle D** : on ajoute deux fois NON devant une formule déjà obtenue.

Exemple : de  $||||| \oplus ||||| = |||||$ , on déduit : NON NON  $||||| \oplus ||||| = |||||$

Une déduction (ou démonstration) dans le système  $\oplus$  est une suite de formules telle que chacune est soit un axiome, soit provient de l'utilisation d'une des règles A, B, C ou D sur des formules précédemment déduites.

Les axiomes et les règles d'inférence doivent être suffisamment simples pour que la vérification qu'une suite de formules est une déduction correcte puisse se faire mécaniquement (c'est-à-dire par algorithme).

Exemple de déduction dans le système  $\oplus$  :

$| \oplus | = |$  (c'est un axiome)

$| \oplus | = |$  (règle B appliquée à la formule précédente).

$|| \oplus | = |$  (règle A appliquée à la formule précédente)

$|| \oplus || = |$  (règle B appliquée à la formule précédente)

$|| \oplus |||| = |$  (règle B appliquée à la formule précédente)

NON  $|| \oplus |||| = ||$  (règle C appliquée à la formule précédente)

**Interprétation du système formel  $\oplus$**

Ce système formel permet de démontrer (i) toutes les propriétés vraies concernant le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers du type : le pgcd de 6 et 4 est 2 (ce qui, avec nos notations, s'écrit  $||||| \oplus |||| = ||$ ) ;

(ii) toutes les formules de ce type précédées d'un nombre quelconque de NON.

Le fait que nous ayons réussi à établir  $|| \oplus |||| = |$  signifie en particulier que le pgcd de 2 et 5 est 1, autrement dit que 2 et 5 sont premiers entre eux. Ayant établi que NON  $|| \oplus |||| = ||$ , nous avons démontré que le pgcd de 2 et 5 n'est pas 2.

**Les propriétés de ce système sont :**

– correction vis-à-vis du domaine mathématique visé : tout ce qu'on démontre en suivant le système est juste ;

– adéquation vis-à-vis du domaine mathématique visé : tout ce qu'on peut formuler avec les formules du système et qui est vrai est démontrable ;

– consistance (résulte de l'adéquation) : jamais on ne prouve une formule et son contraire (la même formule précédée de NON) ;

– complétude : pour toute formule F du système, on peut démontrer F ou NON-F.

Ce système capte complètement le domaine mathématique visé, et son étude peut être menée entièrement (c'est rarement le cas). Il ne contient pas d'indécidables, mais, si on omettait un seul axiome (par exemple  $| \oplus | = ||$ ), certains énoncés vrais (exemple :  $|||| \oplus ||||| = ||$ ) deviendraient indécidables. Le système modifié serait alors incomplet.