

– À l'infini, je dispose d'un système S_{infini} qui possède peut-être une infinité d'axiomes, mais qui est complet.

Ce système semble contredire le théorème de Gödel. Où est la faille de ce raisonnement ?

Il est bien vrai qu'il n'y a plus d'indécidable pour S_{infini} : par construction, il ne peut y en avoir. Si au départ S était consistant, S_{infini} l'est aussi. En revanche, et c'est ce qui ne va pas, le prétendu système S_{infini} n'en est pas vraiment un, car il n'existe aucun moyen algorithmique de savoir si une formule donnée est un axiome ou n'en est pas un. Or pour qu'un système formel soit envisageable en mathématiques, il faut bien sûr qu'on sache en reconnaître les axiomes (on dit que le système doit être effectif). La prétendue méthode pour passer de S_n à S_{n+1} aboutit à une abstraction mathématique qui n'est pas utilisable comme système formel.

L'énoncé du premier théorème de Gödel en faisant apparaître cette précision (qu'on omet souvent pour simplifier l'exposé ou parce qu'on sous-entend le mot effectif dans la définition de système formel) est donc : tout système formel effectif permettant de faire de l'arithmétique est soit incomplet, soit inconsistent.

COMPLÉTUDE DE LA LOGIQUE

Mettons en parallèle le résultat d'incomplétude de Gödel avec un autre résultat de Gödel, de deux ans plus ancien et qui, lui, est positif. Il s'agit de la complétude de la logique. Ce résultat intéresse moins les philosophes, alors que pourtant c'est la comparaison des résultats de complétude et d'incomplétude qui contient les enseignements les plus précieux, et fait entrevoir les mystères les plus profonds sur la nature des mathématiques.

Au lieu de s'intéresser à ce qui est vrai des nombres entiers, on cherche à savoir ce qui est vrai sur le plan de la logique pure. On se pose des questions comme :

- est-il vrai que si $\{a \text{ implique } b\}$ alors $\{non-b \text{ implique } non-a\}$?
- est-il vrai que si $\{pour \text{ tout } x, y : P(x,y)\}$ alors $\{pour \text{ tout } z : P(z,z)\}$?
- est-il vrai que si $\{pour \text{ tout } x, \text{ il existe } y \text{ tel que } : Q(x,y)\}$ alors $\{il \text{ existe } y \text{ tel que pour tout } x : Q(x,y)\}$?

(Réponses : oui, oui, non)

Nous cherchons ici un système formel pour ce que nous dénommons le calcul des prédicats du premier ordre qui est la logique générale où tout raisonnement mathématique peut s'exprimer.

Le résultat de Gödel de 1929 répond à cette question : il existe des systèmes formels qui démontrent toutes les formules justes du calcul des prédicats du premier

4. HERCULE CONTRE L'HYDRE

Une hydre possède une multitude de têtes reliées à son corps et organisées selon un réseau de cous reliés par des nœuds, le tout formant un arbre. Hercule doit tuer l'hydre en coupant toutes les têtes.



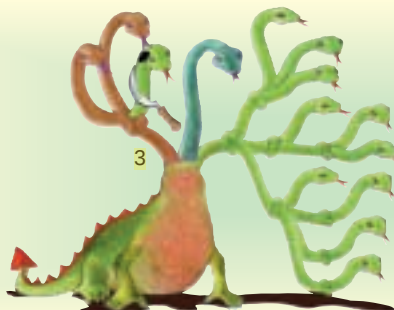
PREMIÈRE COUPURE

En brun, la partie excitée de l'hydre. La partie excitée est dupliquée.



DEUXIÈME COUPURE

En brun, la partie excitée par la deuxième coupe. La partie excitée est ajoutée deux fois.



TROISIÈME COUPURE

En brun, la partie excitée par la troisième coupe. La partie excitée est ajoutée trois fois. S'il coupe la tête bleue reliée directement au corps de l'hydre, elle ne repousse pas.



Coupera-t-on toutes les têtes de l'hydre ? Cette affirmation, démontrable avec des théories puissantes, est un indécidable de l'arithmétique.

Hercule doit tuer l'hydre en ne coupant qu'une tête à la fois et en tranchant la dernière partie du cou située avant la tête coupée. Lorsqu'il coupe une tête et un cou, une multitude de nouveaux cous et têtes apparaissent : lorsqu'il vient de couper la n -ième tête et son cou, le cou en dessous de la partie qu'il vient de couper et tout l'ensemble des nœuds, cous et têtes au-dessus de ce nœud ("le bout excité de l'hydre") se reproduit en n exemplaires qui poussent à côté du bout excité. Toutefois, lorsque Hercule coupe un cou directement lié au corps de l'hydre, les têtes ne repoussent plus.

Hercule peut-il vaincre l'hydre en éliminant toutes les têtes ? L'opération de coupe augmente beaucoup le nombre des têtes, mais diminue aussi le nombre de têtes associées à un cou relié au corps. Aussi espère-t-on arriver au moment où toutes les têtes sont directement liées au corps et où l'on peut les couper sans déclencher de reproduction. On démontre, avec des théories plus puissantes que l'arithmétique de Peano, que Hercule, avec n'importe quelle stratégie de choix de tête à couper, vient à bout de l'hydre en un temps fini, mais aussi que ce résultat est un indécidable de l'arithmétique de Peano.