

peuvent espérer ne jamais rencontrer les monstruosité dont Gödel dit qu'elles les menacent. Toutefois, les développements de la théorie du calcul par K. Gödel, A. Turing, E. Post et S. Kleene, à partir des années 1930 et qui se poursuivent aujourd'hui, donnent de nouveaux arguments aux logiciens.

LA THÉORIE DU CALCUL RÉPAND L'INDÉCIDABILITÉ

En tentant de généraliser le théorème de Gödel, et peut-être parce que ces problèmes étaient dans l'air des années 1930 (on commençait à s'intéresser aux calculateurs qui deviendront les ordinateurs), les logiciens proposèrent une théorie du calcul ; celle-ci allait fournir quelques munitions pour ébranler les mathématiciens.

La théorie du calcul consiste à détailler mathématiquement ce qu'est un algorithme. Pour ce faire, plusieurs voies sont possibles, dont celle, très élégante, que proposa A. Turing : elle consiste à définir une machine à calcul prototypique d'une simplicité parfaite (appelée aujourd'hui machine de Turing), dont le pouvoir théorique de calcul est aussi grand que le plus puissant des ordinateurs passés ou à venir. Cette théorie précise ce qu'est un système formel et fait, grâce à cela, émerger deux grands progrès.

D'une part, on peut formuler des versions générales des théorèmes d'incomplétude de Gödel. L'article de 1931 de Gödel ne concernait que le système formel des *Principia* de B. Russell et A. Whitehead, et quelques systèmes apparentés. La portée des méthodes qu'il utilisait était à identifier, ce que fit la théorie du calcul en précisant ce qu'est un mécanisme de preuve dans un système formel.

D'autre part, la théorie du calcul conduisit à formuler dans chaque système formel une multitude de propositions indécidables ayant un sens proche des préoccupations des mathématiciens, et certainement plus troublantes pour un mathématicien que les énoncés proposés initialement par Gödel.

BOURBAKI CONCERNÉ ?

Donnons quelques exemples d'indécidables parmi les centaines provenant de cette théorie du calcul. Nous nous fixons un système formel S (par exemple, celui de la théorie des ensembles que Bourbaki utilise, mais ce pourrait être celui de l'arithmétique de Peano, ou un autre encore) dont nous supposons qu'il est consistant (lorsque S est inconsistant, tout est vrai et faux à la fois, et donc rien d'intéressant ne se produit dans S).

1. EXEMPLE D'ALGÈBRE INDÉCIDABLE

En algèbre, on utilise des structures (qu'on appelle des semis-groupes) qui sont définies par la donnée de symboles, ici trois, a , b et c , et par des lois qui sont des égalités, ici également au nombre de trois : (1) $ab = bc$, (2) $b = ccc$, (3) $bb = b$. Ce sont les tables de la loi.

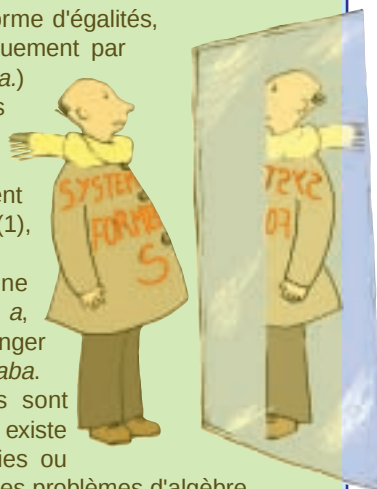
Quelles sont les autres lois, exprimées sous forme d'égalités, que nous pouvons obtenir en procédant uniquement par substitution ? (Attention, ab n'est pas égale à ba .)

Peut-on, par exemple, en utilisant les égalités ci-dessus et aucune autre arriver à la nouvelle égalité : $aaab = b$?

La réponse est oui : en utilisant successivement les égalités 1, 2 et 3, on obtient, en partant de (1), $aaab = aabc = abcc = bccc = bb = b$.

On démontre, avec ces égalités, que l'on ne trouvera jamais $aba = a$. En effet, partant de a , aucune des trois équations ne permet de changer quoi que ce soit, et l'on ne parviendra jamais à aba .

Ainsi, on démontre que certaines équations sont vraies et que d'autres sont fausses, mais il en existe dont on ne peut démontrer qu'elles sont vraies ou fausses : aussi élémentaires qu'ils paraissent, ces problèmes d'algèbre engendrent l'indécidabilité. Pour tout système formel donné, il existe un ensemble fini E_S d'équations et une équation e_S telle que E_S ne permet pas de déduire e_S . Pourtant, les lois régissant S ne permettent pas de démontrer la proposition " E_S ne permet pas de déduire e_S ".



2. L'INDÉCIDABILITÉ AVEC DES JEUX

On appelle jeu diophantien un jeu du type suivant : une équation est fixée, par exemple : $7(b_1 + a_2) + 3 + a_1 + a_3 = (b_2 + 2)(b_3 + 2) + a_1 + a_3$.

Le joueur A choisit un nombre entier positif pour a_1 .
Le joueur B choisit un nombre entier positif pour b_1 .
Le joueur A choisit un nombre entier positif pour a_2 .
Le joueur B choisit un nombre entier positif pour b_2 .
Le joueur A choisit un nombre entier positif pour a_3 .
Le joueur B choisit un nombre entier positif pour b_3 .
La partie est alors terminée.

Si l'équation est vérifiée, B a gagné ; si elle ne l'est pas, A a gagné.

En analysant le jeu correspondant à l'équation indiquée, on voit que A gagnera toujours. Justification. Le premier choix de A est sans importance, car a_1 se simplifie. Le joueur B propose ensuite un nombre b_1 . Le joueur A doit choisir alors un nombre a_2 tel que $7(b_1 + a_2) + 3$ soit un nombre premier. C'est toujours possible, puisqu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $7n + 3$. À partir de là, B ne pourra plus s'arranger pour que l'égalité soit vérifiée, car si l'égalité était vérifiée, après simplification de a_1 et a_3 elle donnerait une décomposition de $7(b_1 + a_2) + 3$ en deux facteurs >1 , ce qui est impossible puisque $7(b_1 + a_2) + 3$ est premier. Le joueur A a donc gagné.

À chaque équation correspond un jeu. Dans un tel jeu à information complète, on sait qu'il existe pour chaque équation une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs : soit A possède la possibilité de toujours gagner, soit c'est B. Bien que le nombre d'échanges soit fini et connu à l'avance, ces jeux diophantiens sont difficiles à analyser. En fait, d'après un résultat d'indécidabilité de Matiassevitch, aucune méthode générale ne permet de mener l'analyse de tous ces jeux : à chaque système formel S correspond au moins un jeu diophantien dont l'analyse est infaisable dans S . Précisément : à chaque système formel S , on peut associer une équation gagnante pour B, et un premier coup pour le joueur A tel que la formule indiquant ce que B doit jouer en réponse à ce premier coup est une proposition indécidable de S .

