

précieusement) une équation terriblement indécidable (voir l'encadré 5).

L'équation est terriblement indécidable, car G. Chaitin a démontré qu'un système formel donné S ne peut jamais résoudre qu'un nombre fini de cas de l'équation, tous les autres cas étant indécidables dans S . Les moyens de preuve définis au début du traité de Bourbaki atteindront donc un jour une limite absolue face à cette équation. Même si le traité se développe pendant un milliard d'années, au-delà d'un certain point d'élucidation maximale, il ne permettra plus jamais de régler un seul cas supplémentaire de l'équation.

QUE RÉPONDEZ-VOUS DONC À ÇA ?

Quelle est la réponse des mathématiciens face à cet arsenal de résultats d'indécidabilité qui ont envahi chaque spécialité mathématique ?

Ils répondent qu'à chaque fois tout cela est construit sur du codage. Le programme qui ne s'arrête pas, le jeu à information complète que Bourbaki ne réussit pas à analyser, l'équation indécidable dont on ne peut traiter qu'un nombre fini de cas, etc., tout cela provient à chaque fois du déguisement avec les notations de divers domaines mathématiques, des indécidables originaux trouvés par Gödel et Turing. À chaque fois, les objets en cause sont complexes et longs à écrire (l'équation de Chaitin, avec ses 12 000 variables, battant tous les records). Les mathématiciens spécialistes d'équations diophantiennes ne se seraient jamais intéressés d'eux-mêmes aux équations que les logiciens aidés de la théorie du calcul leur mettent sous le nez. Les mathématiciens répondent donc : «Les indécidables que vous construisez sont artificiels et toutes vos constructions ne peuvent nous forcer à croire que nos propres problèmes, ceux que nous rencontrons dans le cours normal du développement de nos théories, risquent d'être indécidables.»

Face à cette réponse, les logiciens devaient dégager les indécidables de tout codage.

INDÉCIDABLES DE J. PARIS ET L. HARRINGTON

Cela se produisit, il y a une vingtaine d'années, quand plusieurs énoncés arithmétiques simples et dégagés de tout codage furent démontrés indécidables vis-à-vis de l'arithmétique de Peano (voir l'énoncé indécidable concernant les hydres cité dans la rubrique du mois de novembre).

Nombreux furent ceux, y compris parmi les mathématiciens, qui reconnurent alors qu'un pas important avait été franchi.

Malgré ces progrès, certains mathématiciens ont eu beau jeu de remarquer que les indécidables arithmétiques dégagés du codage inventés par les logiciens n'avaient jamais été envisagés spontanément par les mathématiciens. On parla d'énoncés «cuisinés exprès».

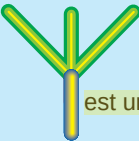
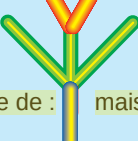
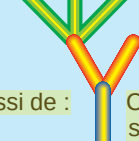
Ces énoncés sont, là encore, des constructions de logiciens. De plus, dans la grande majorité des cas, il s'agit d'indécidables de l'arithmétique de Peano décidables dans Zermelo-Fraenkel, et non pas d'indécidables de Zermelo-Fraenkel. Il manque donc encore un cas incontestable d'énoncé que les spécialistes d'arithmétique considèrent intéressant avant que les logiciens ne s'y intéressent et sur lequel ils travaillent, que les logiciens démontreraient indécidable vis-à-vis de l'arithmétique de Peano (qui

est la théorie naturelle pour écrire les raisonnements d'arithmétique) ou, mieux, indécidable avec Zermelo-Fraenkel.

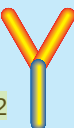
Les candidats ne manquent pas. Il y a d'une part les résultats d'arithmétique qu'on démontre avec des outils plus puissants que ceux de l'arithmétique de Peano. C'est le cas de nombreux théorèmes concernant les nombres premiers dont les premières démonstrations – qualifiées de transcendantes – utilisaient des techniques d'analyse formalisable dans la théorie Zermelo-Fraenkel, mais pas dans Peano. Pour plusieurs d'entre eux, on sait aujourd'hui que l'on peut en fait les démontrer dans l'arithmétique de Peano. Ces énoncés ne constitueront donc pas des propositions envisagées spontanément par les mathématiciens, démontrables dans Zermelo-Fraenkel, indécidables dans

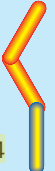
4. LES ARBRES DE KRUSKAL

Un arbre est dit sous-arbre d'un autre si on peut retrouver la forme du premier dans le second.

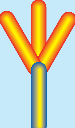
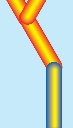
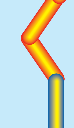

est un sous-arbre de :

mais aussi de :

Ce n'est pas un sous-arbre de :

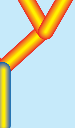
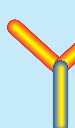
On cherche à construire des séries d'arbres tels qu'aucun ne soit le sous-arbre d'un arbre placé plus loin. Une telle série d'arbres est dite correcte.

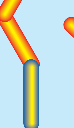




On dit qu'une série est de type 2 si le premier arbre possède deux branches au plus, le second trois branches au plus, etc. En construisant des séries correctes de type 2, on s'aperçoit qu'elles n'ont jamais plus de quatre arbres.


?

Une série est de type 3 si le premier arbre possède trois branches au plus, le second quatre branches au plus, etc. On s'aperçoit, là aussi, qu'on ne peut jamais prolonger indéfiniment les séries correctes de type 3.

Le théorème de Kruskal indique que, «pour tout entier n supérieur à 1, il existe une limite k à la longueur des séries correctes de type n ».

Cet énoncé ne contient aucun codage déguisé de proposition logique. C'est pourtant un énoncé indécidable de l'arithmétique de Peano. Cet énoncé est l'un de ceux qui auraient dû convaincre les mathématiciens que, même à propos de problèmes simples et naturels, l'indécidabilité peut surgir.