



Gregory Chaitin

5. LES INDÉCIDABLES DE LA COMPLEXITÉ

Même le plus puissant système formel ne peut traiter qu'un nombre fini de cas de l'équation de Chaitin.

Gregory Chaitin a construit et fait imprimer une équation indécidable. L'équation est à coefficients entiers et ne fait intervenir que des additions, des multiplications et des exponentiations (une équation simple de ce type serait : $n - x^y + 3y + 2t = 0$). On ne s'intéresse qu'aux solutions en nombres entiers de l'équation. L'équation dépend d'un paramètre n et possède 12 000 variables ; on peut la résumer en écrivant : $P(n, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12000}) = 0$.

Pour chaque valeur de n , l'équation possède une infinité de solutions ou n'en possède qu'un nombre fini. On dit que "l'équation est résolue pour n " si on réussit à savoir dans lequel des deux cas on se trouve. G. Chaitin a démontré qu'un système formel donné S ne peut jamais résoudre qu'un nombre fini de cas de l'équation, tous les autres cas étant indécidables dans S . Pour avancer dans la résolution de cette équation, les mathématiciens seront indéfiniment obligés d'ajouter de nouveaux axiomes à leurs théories.

Peano. Pour le grand théorème de Fermat, la question est ouverte : la démonstration actuelle utilise des méthodes qui dépassent l'arithmétique de Peano, et l'on ne sait pas la retranscrire dans Peano.

Les conjectures considérées par les arithméticiens (conjectures des nombres premiers jumeaux, conjecture de Riemann, conjecture de Goldbach, etc.) sont peut-être des indécidables de l'arithmétique de Peano ou de Zermelo-Fraenkel. Personne n'a su le démontrer, et aucune piste ne semble ouverte. Force est de constater ici l'échec des logiciens : finalement aucun argument définitif n'a été fourni aux mathématiciens sceptiques, et la plupart des arithméticiens restent donc persuadés que la question de l'indécidabilité ne se pose pas vraiment pour les conjectures non démontrées. Au pire, pensent-ils, ces conjectures seront indécidables dans Peano, mais décidables dans Zermelo-Fraenkel. Le débat n'est donc pas clos.

AUTRES EXTENSIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

Une explication de cette situation est suggérée par certains travaux récents des logiciens S. Feferman et S. Simpson qui se sont intéressés à des types nouveaux d'extension de l'arithmétique.

Lorsqu'on envisage d'étendre le pouvoir de l'arithmétique pour inclure les nombres réels, des fonctions continues et des objets complexes que l'analyse utilise, la méthode usuelle, adoptée par Bourbaki et par la quasi-totalité des mathématiciens, consiste à passer à la théorie des ensembles Zermelo-Fraenkel. La puissance de Zermelo-Fraenkel provient de l'axiome de l'infini, car on sait que si l'on prend Zermelo-Fraenkel et qu'on y remplace l'axiome «il existe un ensemble

infini» par l'axiome «il n'existe pas d'ensemble infini», on obtient alors un système équivalent à Peano.

L'extension de Peano à Zermelo-Fraenkel augmente le domaine d'objets mathématiques que le mathématicien peut traiter, mais accroît le risque de l'inconsistance dans le sens suivant : Zermelo-Fraenkel pourrait être inconsistant et Peano consistant, alors que l'inverse est impossible (car la consistance de Zermelo-Fraenkel permet de prouver celle de Peano, mais pas l'inverse).

Autrement dit, en passant de Peano à Zermelo-Fraenkel, le mathématicien enrichit les objets au prix d'un risque nouveau de contradiction. Si la situation était inévitable, ce qu'on a cru longtemps, nous accepterions ce risque sans hésitation, car nul ne souhaite renoncer aux résultats de l'analyse, qui sont si importants en physique et dans les applications des mathématiques. Cependant il existe un autre type d'extensions de l'arithmétique qui ne prend pas de risque et qui pourtant permet aussi de faire de l'analyse et de développer toutes les mathématiques nécessaires aux physiciens.

Ainsi, S. Feferman et S. Simpson ont mis à la disposition des mathématiciens des versions de l'analyse où l'on retrouve des résultats classiques (théorie classique des fonctions continues, existence de solution des systèmes différentiels, etc.) et tous les objets et méthodes utiles aux développements des mathématiques servant dans les sciences de la nature.

Ces systèmes sont un peu plus complexes à utiliser que Zermelo-Fraenkel, mais leur intérêt est immense. Ils montrent, d'une part, que d'autres voies que celle un peu brusque de la théorie des ensembles sont praticables et suffisent pour fonder et développer les mathéma-

tiques dont les sciences ont besoin. D'autre part, ils montrent que ce n'est peut-être pas par hasard si ce qui intéresse spontanément les mathématiciens quand il s'agit d'arithmétique n'a jamais été prouvé indécidable vis-à-vis de Peano.

Certaines extensions prudentes possèdent les mêmes indécidables arithmétiques que Peano, aussi s'interroge-t-on : les extensions prudentes ne sont-elles pas la voie raisonnable et réaliste d'extension de Peano ? La voie de Zermelo-Fraenkel correspondrait à une illusion infinitaire, commode, mais imprudente, voire trompeuse. Les indécidables de l'arithmétique de Peano seraient indécidables pour de bonnes raisons, et les mathématiciens ne s'intéresseraient jamais spontanément à des indécidables de Peano parce que ils resteraient dans le monde des mathématiques applicables, où les indécidables de Peano sont indécidables.

Pour faire de la physique, seules certaines parties des mathématiques sont utiles ; pour des raisons de commodité, on utilise Zermelo-Fraenkel qui est inutilement puissant. Cette puissance a pour effet (peut-être malencontreux) de diminuer le nombre des indécidables ; ne considérer que les systèmes formels juste assez puissants pour faire de la physique ne conduit pas à la suppression d'indécidables. Il y a peut-être une raison profonde, mal comprise aujourd'hui, à cette situation : il se pourrait que seuls les systèmes qui gardent les mêmes indécidables (les extensions conservatrices de Peano correspondent aux «vraies mathématiques», ce que, instinctivement, les mathématiciens avaient compris).

Tout cela est bien mystérieux et compliqué. S'astreindre à ne considérer que des systèmes qui maintiennent les mêmes indécidables plutôt que de vouloir s'en débarrasser (chose de toutes les façons impossible, on le sait) non seulement limiterait les risques d'inconsistance, mais éviterait d'entrer dans un monde abstrait irréel et peut-être insensé, et en tout cas inutile à l'applicabilité des mathématiques.

V. BLONDEL et J.N. TSITSIKLIS, *The Boundedness of All Products of a Pair of Matrice is Undecidable*, rapport de recherche de l'Université de Liège, 1999.

G. CHAITIN, *The Limits of Mathematics*, Springer-Verlag, 1997.

J.-P. DELAHAYE, *Information, complexité et hasard*, Hermès, Paris, 1994 et 1999.

J.-L. KRIVINE, *Théorie des ensembles*, Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, Paris, 1998.

Y. MATHIASSEVITCH, *Le dixième problème de Hilbert et son indécidabilité*, Masson, 1995.



La gravité sans pesanteur

ROLAND LEHOUCQ

En chute libre, dans un champ de pesanteur, on a la sensation de l'absence de pesanteur ! De ce paradoxe résulte l'état d'impesanteur.

Platon avait tort : si, à la surface de la Terre, les corps «graves» tombent, ce n'est pas en raison... de leur propension à la chute.

Un tel raisonnement circulaire évoque le raisonnement des médecins de Molière, «voilà ce qui fait que votre fille est muette» pour expliquer que Lucinde ne parlait pas. Les corps tombent parce que les masses s'attirent : c'est la gravitation universelle, et les corps sur Terre sont attirés vers le bas par la masse de la Terre, plus précisément vers le centre de la Terre.

Toutefois, la Terre n'est pas parfaitement sphérique, comme l'imposerait la seule gravitation (la gravitation tend à ce que les masses soient aussi proches que possible et c'est la forme sphérique qui remplit cette condition) : la Terre tourne, et, outre la force d'attraction universelle, les masses subissent aussi une force tendant à les écarter de la surface. Cette force centrifuge est d'autant plus importante que la distance à l'axe de rotation de la Terre est grande, de sorte que la Terre est renflée à l'équateur, où la force centrifuge est maximale, et aplatie aux pôles, où elle est nulle.

Sur l'équateur terrestre, la force centrifuge n'est qu'un trois-centième de l'at-

traction gravitationnelle, et la pesanteur est peu différente de l'attraction terrestre. Remarquons cependant qu'un sauteur en hauteur a intérêt à sauter aux pôles, et qu'une variation d'un trois-centième du record du monde de saut en hauteur (2,45 mètres) n'est que très légèrement inférieur à un centimètre, la précision de mesure des sauts. Si la Terre tournait 17 fois plus vite, les jours n'auraient que 1,4 heure, et les habitants situés sur l'équateur seraient éjectés dans l'espace.

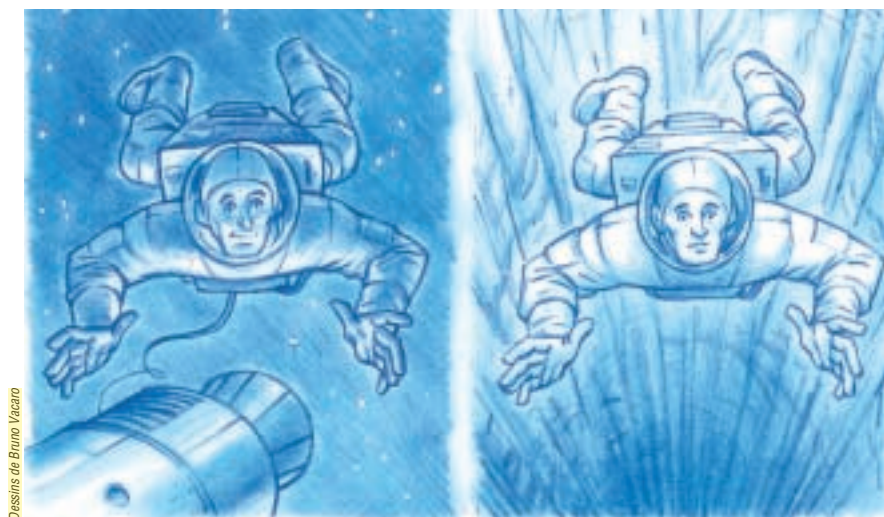
Notre perception physiologique du poids est indissociable du sol sur lequel nous reposons. Nous ne passons pas à travers le sol, parce que l'attraction terrestre n'est pas suffisante pour briser les liaisons chimiques qui lient les atomes du sol ; ainsi subissons-nous de la part de celui-ci une force de réaction exactement opposée à la gravité terrestre. C'est justement cette réaction qui nous donne la sensation de poids : que le sol se dérobe sous nos pieds et c'est la chute ! Le mouvement est théoriquement uniformément accéléré, mais dans l'air, par exemple pour un parachutiste en chute, la vitesse de chute atteint une limite déterminée par la densité de l'air et par la géométrie du corps.

Dans un puits vidé de son air, la chute libre imposée par la gravité n'est perturbée par aucune autre force. Le mouvement est alors rectiligne et uniformément accéléré, à condition de négliger les variations de l'accélération de la pesanteur (l'attraction diminue à mesure que l'on s'approche du centre de la Terre) et la force de Coriolis (une force d'inertie due à la rotation de la Terre et qui dévie légèrement la trajectoire des objets en mouvement). Supposons que nous lâchions un objet pendant la chute. Stupeur ! Il semble flotter sur place. Repoussé, il s'éloigne de nous à vitesse constante. La gravité semble avoir disparu.

LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

Cette situation est comparable à celle vécue par un astronaute en orbite autour de la Terre : la force de gravitation est équilibrée par la force centrifuge due à sa rotation. On peut aussi décomposer son mouvement en une chute perpétuelle et un mouvement uniforme résultant de sa vitesse le long de son orbite. Toujours est-il que nous ressentons les effets, parce que le sol s'oppose à notre chute vers le centre de la Terre. Mais cette sensation disparaît quand nous subissons l'attraction gravitationnelle sans que s'exerce aucune résistance. La conclusion semble donc paradoxale : un mobile en chute libre dans un champ de pesanteur donne à ses passagers l'illusion que le champ de gravitation n'existe pas ! C'est la définition de l'état d'impesanteur où les effets de la pesanteur ne se manifestent plus, ce qui n'implique nullement la disparition réelle de la gravité.

Inversement, un mobile accéléré uniformément dans une direction donne à ses passagers l'illusion d'une pesanteur dans la direction opposée. C'est ce que ressentent les astronautes lors du décollage d'une fusée où l'accélération initiale est si forte qu'ils subissent une pesanteur artificielle plusieurs fois



Dessins de Bruno Vacaro

supérieure à celle de la Terre. Dans la bande dessinée *Objectif Lune*, Hergé distingue la phase propulsée (avec création d'une pesanteur artificielle) de la phase balistique de la fusée lunaire (qui s'accompagne d'un état d'impesanteur). L'équivalence entre chute libre et impesanteur ou entre pesanteur et mouvement accéléré, connue sous le nom de principe d'équivalence, est le fondement de la théorie de la gravitation élaborée par Albert Einstein au début du xx^e siècle sous le nom de Relativité générale.

La Terre étant en chute libre dans l'espace (car elle gravite autour du Soleil) pourquoi ses habitants ne sont-ils pas en état d'impesanteur? Ils le seraient si la Terre avait une masse négligeable, mais, étant très massive, elle crée dans son voisinage un champ de gravité suffisant pour nous plaquer à sa surface. Dans une station orbitale habitée, la situation est différente : les astronautes sont en impesanteur, car l'attraction qu'exerce la station sur ses occupants est totalement négligeable par rapport au champ de pesanteur terrestre.

Dans la pratique, l'obtention d'un état d'impesanteur parfait est délicat, même dans une station orbitale. Divers facteurs ajoutent des forces résiduelles : l'inhomogénéité de la répartition de masse de la Terre, le frottement de la haute atmosphère sur la station, le mouvement de la station sur elle-même, etc. Ainsi, utilise-t-on souvent le terme de microgravité, qui désigne un état où la pesanteur apparente est très faible.

L'ACCÈS À UNE PHYSIQUE ORIGINALE

En microgravité, les scientifiques étudient des systèmes physiologiques et des matériaux dans des conditions impossibles à réaliser sur la Terre. L'absence de pesan-

teur apparente modifie considérablement les conditions expérimentales et fait disparaître des phénomènes aussi courants que la sédimentation ou la convection.

Les liquides ont aussi des comportements étonnants. Sur Terre, sous l'effet de la gravité, un liquide épouse la forme du récipient qui le contient. La tension superficielle, une force beaucoup plus faible qui résulte de la différence entre la force de liaison des molécules à la surface et la force de liaison des molécules à l'intérieur du liquide n'a d'effets que sur le ménisque, aux bords du récipient. En microgravité, puisque la pesanteur apparente est quasi nulle, la tension superficielle impose ses effets et fixe la configuration d'équilibre du liquide, c'est-à-dire celle qui minimise son énergie. En l'absence de gravité, tout liquide tendra vers la forme sphérique pour laquelle la surface est minimale à volume fixé, car c'est l'état où l'énergie liée aux forces de tension superficielle est minimale.

C'est ce comportement insolite qui surprend le capitaine Haddock lorsqu'il tente de boire un verre de whisky dans *Objectif Lune*. La fabrication des plombs de chasse est également fondée sur ce comportement : de petites quantités de métal fondu placées en chute libre adoptent la forme sphérique et se solidifient dans cette configuration avant d'atteindre le sol. Cet effet peut être simulé au sol, comme l'a fait Joseph Plateau en 1861, en mélangeant deux liquides de même densité, mais non miscibles : grâce à la flottabilité d'un liquide dans l'autre, la masse liquide isolée au sein du second fluide adopte la forme sphérique (ce que l'on voit dans les lampes à lave).

Ce comportement inhabituel n'est pas sans poser problème : comment boire dans l'espace? Comment alimenter les systèmes de

propulsion des satellites?

Sans précautions particulières, le carburant se répartirait au hasard le long des parois du réservoir rendant impossible l'alimentation régulière des propulseurs.

Le séjour des humains dans l'espace est limité par les modifications physiologiques qui résultent de l'état d'impesanteur. Après, plusieurs mois, les os se décalcifient, comme dans l'ostéoporose. Deux solutions pour les séjours de longue durée dans l'espace : l'adaptation de l'environnement à l'homme ou l'adaptation de l'homme à son environnement. Dans le premier cas, il s'agit de recréer un état de pesanteur analogue à celui que l'on a sur Terre, par exemple en faisant tourner la station sur elle-même. Dans le second, il faudrait attendre (ou provoquer?) des mutations qui permettraient l'adaptation de l'homme à cette absence de pesanteur. Toutefois, ces nouveaux humains adaptés à leur nouvel état pourrions difficilement revenir sur la Terre... excepté dans une piscine, où la poussée d'Archimède compense une partie de la gravité.

Roland LEHOUCQ est astrophysicien au Service d'astrophysique du CEA.

J.-P. PENOT, *Le phénomène d'impesanteur*, in *Bulletin de l'Union des physiciens*, n° 700, p. 1-44, 1988.

V. PLETZER, *Pesanteur? Non, merci!*, in *Ciel et Terre*, vol. 113, p. 53, 1997.

Superdéformation en apesanteur, in *Pour la Science*, p.22, août 1997.

R. WHITE, *Le corps humain en apesanteur*, in *Pour la Science*, novembre 1998.

