

obtint une bonne description de la variation d'épaisseur du tissu en fonction de son allongement.

Puis, à l'Université de Kyoto, Sueo Kawabata proposa un modèle plus simple, qui négligeait l'ondulation des fils ; c'était toutefois une amélioration, parce qu'il prenait en compte les modules en traction et en compression des fils (les relations entre la déformation des fils et les contraintes qui leur étaient appliquées), ce qui permettait une analyse de leur comportement mécanique sous sollicitation. Il tenait également compte des couplages dus aux contacts entre les fils.

La première théorie véritablement mécanique apparut seulement en 1964 : B. Olofsson voulut également tenir compte de la rigidité en flexion des fils. S'inspirant du travail de Pierce, il se limita à un problème plan et considéra que chaque fil n'est soumis qu'à une force d'allongement et à des forces de traction qui proviennent des fils transverses.

En 1966, au Collège Shenkar, en Israël, P. Grosberg tenta ensuite d'expliquer le comportement du tissu soumis à une sollicitation de flexion, en

prenant en compte le rôle des fibres qui constituent le fil. Il considéra que les fibres d'un fil peuvent occuper deux types de région : des intersections entre les fils de chaîne et les fils de trame, où fils et fibres (considérées comme parallèles, dans sa description) sont déformés (les fibres situées à l'extérieur de la courbure sont étirées, tandis que celles de l'intérieur de la courbure sont comprimées), et des zones de raccord. Les déformations engendrent des frottements : lorsque la différence de tension sur les fibres situées à l'extérieur de la courbure est supérieure à la résistance au frottement, par exemple, les fibres glissent les unes sur les autres. P. Grosberg décrit ces phénomènes en assimilant le tissu à une superposition de plaques fléchies et en calculant les frottements relatifs entre les plaques.

Plus récentes, enfin, les théories énergétiques reconnaissent enfin que les fils d'un tissu se disposent de façon que la structure finale ait une énergie minimale. L'énergie totale est la somme de plusieurs énergies : l'énergie de flexion due aux ondulations, l'énergie de torsion des fils, l'énergie

de compression latérale due aux contacts entre les fils, et l'énergie d'étiement longitudinal des fils. Selon les cas, certaines de ces énergies sont négligeables.

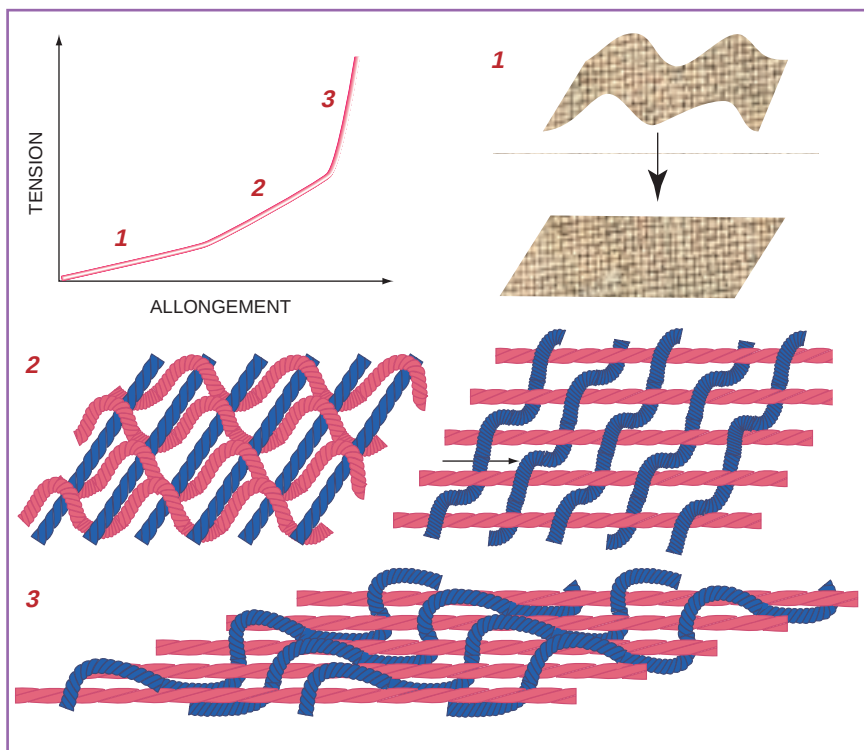
Occultant chacune des aspects importants des textiles, ces diverses descriptions sont toutefois insuffisantes. En revanche, l'analyse micromécanique, explorée depuis les années 1970, décrit les phénomènes essentiels qui déterminent le comportement des textiles.

La micromécanique du tissu

Bien que les textiles soient utilisés pour la réalisation de surfaces dans l'espace à trois dimensions, on peut souvent les considérer comme des structures à deux dimensions, parce qu'ils sont bien plus minces que longs et larges. La première étape de la fabrication d'un matériau textile est d'ailleurs la réalisation d'un patron, plan, que l'on obtient par une mise à plat des éléments de surface tridimensionnels. L'optimisation du patron, c'est-à-dire le choix des fils et de leur agencement (l'armure), nécessite une bonne connaissance du comportement mécanique du tissu, à l'échelle des pièces qui seront assemblées. Aussi une modélisation suffisamment précise et réaliste à cette échelle de description intermédiaire sert de point de départ utile.

La modélisation doit donc tenir compte des caractéristiques du tissu mises en œuvre lors de la confection : hétérogénéité du matériau, forte relation entre l'échelle microscopique et les échelles supérieures, grandes déformations et grandes rotations. L'analyse micromécanique tient compte de ces caractéristiques, parce qu'elle se fonde sur la modélisation du constituant de base du matériau (le fil), pour ensuite remonter au comportement à l'échelle supérieure, en moyennant les comportements des constituants microscopiques.

Une autre possibilité serait une modélisation directement macroscopique, qui tiendrait indirectement compte des caractéristiques propres à l'échelle microscopique, par exemple à l'aide de variables qui seraient ensuite déterminées par des expériences sur des tissus réels. Toutefois



2. UN TISSU QUE L'ON ÉTIRE se déforme par trois mécanismes successifs. Tout d'abord, les ondulations du tissu sont aplanies (*en haut*). Puis les fils étirés deviennent rectilignes, tandis que les fils perpendiculaires gagnent l'ondulation perdue (*au milieu*). Enfin les fils étirés sont allongés élastiquement (*en bas*), puis se déforment de façon irréversible. Au-delà, les fils cassent et le tissu se dégrade.

la démarche micromécanique a l'avantage que le comportement obtenu à l'échelle supérieure incorpore toutes les caractéristiques du matériau au niveau microscopique.

Naturellement le calcul de moyennes risque de faire perdre de l'information, mais un modèle qui décrirait toutes les caractéristiques microscopiques du matériau serait excessivement complexe.

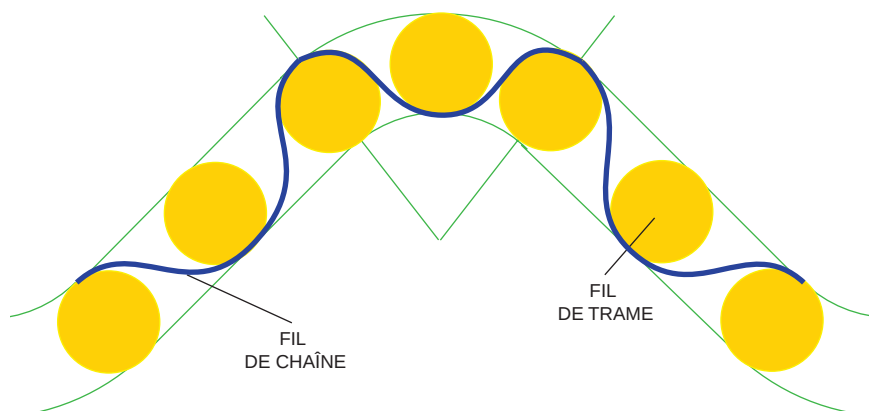
Poutres ondulées

La micromécanique modélise les tissus par un système de poutres : chaque fil du réseau est considéré comme une poutre flexible et extensible, de section faible par rapport à sa longueur. Pour décrire le comportement de la ligne moyenne (l'axe) de ces poutres, on utilise des lois de comportement linéaires élastiques : on admet que la déformation est proportionnelle à la contrainte, et que les poutres reprennent leur position initiale dès que la déformation cesse. On néglige volontairement l'hétérogénéité du fil, liée à son aspect fibreux, et susceptible d'introduire des dissipations (frottements entre fibres) et des couplages entre les différents modes de déformation (flexion/torsion) ; de même, on assimile les zones de contact entre les fils à des points (voir la figure 4).

Dans le cas de la toile, qui a l'armure la plus simple, on peut engendrer le réseau de fils par la translation de deux vecteurs de base orthogonaux, chacun étant associé à deux éléments de poutre ayant pour extrémité des nœuds qui idéalisent les zones de contact entre les fils. Ces deux vecteurs définissent la cellule de base, à l'intérieur de laquelle on analyse le comportement du tissu. Le réseau de poutres est supposé infini dans son plan.

Les éléments de poutre peuvent onduler hors du plan (ondulations transverses), tout comme les fils de chaîne et de trame d'un tissu. En revanche, on néglige les changements de forme (cisaillement) du treillis de poutres dans le plan. À chaque nœud, on associe une variable de translation, le déplacement, et une variable de rotation, qui décrit l'orientation de la ligne moyenne de la poutre dans le plan vertical.

On peut alors calculer l'énergie de déformation de la cellule de base, et



3. ON DÉCRIT les grandes déformations des tissus en considérant que le fil de chaîne, par exemple, oscille dans une sorte de boîte, autour du fil de trame ; les ondulations du tube décrivent les plissements du tissu.

passer à un matériau continu équivalent en faisant tendre les dimensions de la cellule de base vers zéro. La rotation d'une poutre devient une «microrotation».

Un matériau ainsi caractérisé par des déplacements et par des microrotations en chaque point est nommé matériau micropolaire, ou milieu de Cosserat, du nom des deux frères E. Cosserat et F. Cosserat, qui les décrivent au début du XX^e siècle. Ces matériaux appartiennent à la classe plus vaste des milieux continus généralisés.

L'approche micromécanique permet ainsi de déduire le comportement du tissu à partir des propriétés des fils. Le degré de finesse de la modélisation peut être accru par la description d'interactions à plus ou moins grande portée dans le matériau. Chaque raffinement supplémentaire fait intervenir une échelle de longueur qui définit la portée des interactions relatives à un mécanisme spécifique de déformation.

Le couplage entre les fils de chaîne et les fils de trame s'exprime notamment par une relation entre les moments des forces exercées sur chacun des deux fils en contact ; en utilisant le principe des actions mutuelles, qui stipule que le moment exercé par le fil de chaîne sur le fil de trame est l'opposé du moment exercé par le fil de chaîne sur le fil de trame, on obtient une relation sur les microrotations de chaque fil dans son plan.

Enfin, on peut prendre en compte les glissements possibles entre fils en ajoutant des variables de déformation et de microcourbures plastiques : le glissement d'un fil est analogue à la déformation permanente d'une poutre.

Analyse non standard et textiles

L'analyse non standard est une autre façon de passer de la description discrète à la description continue. Elle justifie mathématiquement la théorie micromécanique et, surtout, elle la complète.

L'analyse non standard fut développée dans les années 1960 par Abraham Robinson, de l'Université de Los Angeles. Elle introduit le concept de standard, qui ne peut être énoncé dans un cadre mathématique classique et qui est régi par des axiomes spécifiques nommés transfert, idéalisation et standardisation (dû à E. Nelson, de l'Université de Princeton).

Le concept de standardisation formalise l'idée intuitive d'objets mathématiques bien définis, tels les nombres entiers 0, 1, 2, 3... ou encore les ensembles de nombres relatifs, rationnels, réels... : est standard tout objet qui peut être explicitement défini par le cadre classique.

L'axiome d'idéalisation reconnaît l'existence d'entiers non standards, supérieurs à tout entier standard. De ce fait, l'ensemble des nombres réels contient, en plus des réels standards, des réels (positifs ou négatifs) très grands, très petits ou modérés. Les nombres très grands sont plus grands que tout réel standard. Les réels très petits sont plus petits que tous les nombres de la forme $1/x$, où x est un nombre réel standard : si ω est un nombre non standard très grand, le nombre $1/\omega$ est un nombre très petit non standard. Enfin, les nombres de la