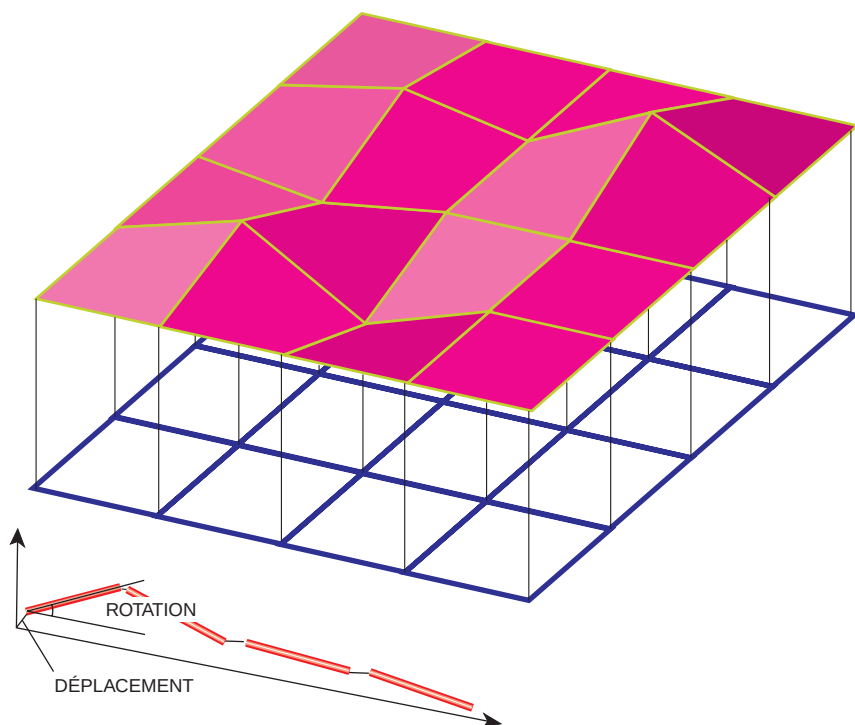




4. L'ANALYSE MICROMÉCANIQUE décrit les tissus en considérant qu'ils sont analogues à un réseau de poutres infiniment minces (ici l'armure considérée est celle de la toile). On considère que ce réseau carré est déformé de façon que, vu de dessus, sa projection reste carrée (en bleu). Les poutres sont individuellement déplacées et tournées. Pour passer à un matériau continu, dont on peut calculer les déformations, on fait tendre la taille des cellules vers zéro : la rotation des poutres devient alors une microrotation.

forme $n + 1/\omega$, où n est un nombre entier, sont des non standards modérés (les nombres entiers sont standards modérés).

L'analyse non standard procure des règles de comparaison d'ordres de grandeur entre nombres réels, et elle permet de simplifier certains termes (ceux qui sont estimés très petits) dans les équations du comportement des systèmes physiques.

Les prémices de ce genre d'analyse sont déjà présentes dans les travaux du mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), qui fut surnommé le «prince des mathématiques». Les règles du calcul non standard sont celles du calcul infinitésimal, conformes à l'intuition classique : l'axiome de standardisation stipule que tout nombre réel modéré x est très proche d'un unique réel standard noté ${}^o x$, son «ombre» ; de même, à toute fonction f qui ne prend que des valeurs modérées, on peut associer une ombre ${}^o f$, c'est-à-dire une fonction telle que, pour tout nombre standard x , la valeur prise par ${}^o f$ soit égal à l'ombre du nombre $f(x)$.

L'analyse non standard est une extension conservatrice de la mathématique

classique : tout théorème d'analyse non standard qui peut être exprimé sans faire appel aux nouveaux concepts est vrai en mathématique classique. En revanche, elle introduit des outils nouveaux qui résolvent des problèmes difficilement solubles dans l'analyse standard.

Un outil important de l'analyse non standard est ainsi la stroboscopie, que nous avons appliquée à la modélisation des poutres. La stroboscopie permet d'obtenir une description continue d'un système à partir d'une description initialement discrète. Elle donne des conditions suffisantes pour que, à un ensemble fini de points qui donne une forme approchée d'une courbe, on puisse associer une courbe continue qui est caractérisée par la solution d'une équation aux dérivées partielles. La courbe continue est l'ombre du modèle discontinu.

Ainsi le fil du tissu, qui était assimilé à une poutre continue dans l'approche micromécanique, est idéalisé par une succession de tiges droites indéformables, connectées par des ressorts qui en constituent les articulations.

Chaque tige est soumise à un couple exercé par les tiges adjacentes. De plus, chaque nœud est soumis à une force ponctuelle, qui représente l'action des fils transverses. Ce modèle, bien que simplifié, est très riche. Tout l'intérêt de la stroboscopie est d'utiliser la puissance d'un outil continu, tout en continuant de calculer sur des objets discrets.

À partir de l'énergie du système discontinu et d'un principe de minimisation d'énergie, l'analyse non standard procure un ensemble d'équations où interviennent les variables angulaires (les angles entre les poutres). On décrit le système continu équivalent en faisant tendre la longueur de chaque tige vers un réel très petit : le théorème de stroboscopie fournit alors une équation dont l'inconnue est la variable angulaire continue, qui décrit l'orientation de la poutre ondulée en chacun de ses points.

Par cette méthode, on obtient des informations que ne donnait pas l'analyse micromécanique : par exemple, on prévoit de façon plus précise le flambement des poutres soumises aux contraintes.

La description du comportement des textiles par la mécanique des poutres ondulées (micromécanique ou non standard) s'applique à des textiles variés. Le cas de la toile que nous avons exclusivement considéré jusqu'ici est le plus simple, et la complexité de l'analyse est accrue pour des armures plus complexes, telles celle du sergé ou celle du satin (voir la page 36). Toutefois, dans le principe, on conserve la même méthode de transition d'échelles : l'énergie obtenue à l'échelle de la cellule de base doit, par sa forme, refléter le contenu microscopique de cette cellule. À l'échelle mésoscopique du matériau continu, on pourrait alors envisager une classification des structures textiles selon la nature et la forme de la densité d'énergie obtenue pour le matériau continu équivalent.

Les grandes perturbations

En revanche, les deux analyses précédentes ne s'appliquent qu'à des tissus peu déformés : la description par des poutres ondulées limite les calculs à de petites perturbations d'un tissu plan, sans décrire les gauchissements