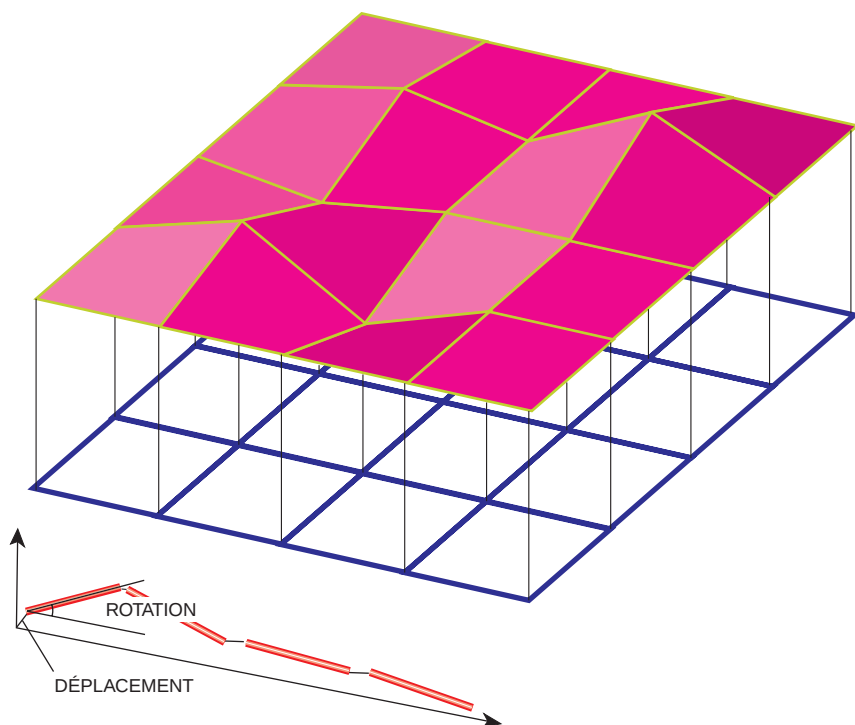




4. L'ANALYSE MICROMÉCANIQUE décrit les tissus en considérant qu'ils sont analogues à un réseau de poutres infiniment minces (ici l'armure considérée est celle de la toile). On considère que ce réseau carré est déformé de façon que, vu de dessus, sa projection reste carrée (en bleu). Les poutres sont individuellement déplacées et tournées. Pour passer à un matériau continu, dont on peut calculer les déformations, on fait tendre la taille des cellules vers zéro : la rotation des poutres devient alors une microrotation.

forme $n + 1/\omega$, où n est un nombre entier, sont des non standards modérés (les nombres entiers sont standards modérés).

L'analyse non standard procure des règles de comparaison d'ordres de grandeur entre nombres réels, et elle permet de simplifier certains termes (ceux qui sont estimés très petits) dans les équations du comportement des systèmes physiques.

Les prémices de ce genre d'analyse sont déjà présentes dans les travaux du mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), qui fut surnommé le «prince des mathématiques». Les règles du calcul non standard sont celles du calcul infinitésimal, conformes à l'intuition classique : l'axiome de standardisation stipule que tout nombre réel modéré x est très proche d'un unique réel standard noté ${}^o x$, son «ombre» ; de même, à toute fonction f qui ne prend que des valeurs modérées, on peut associer une ombre ${}^o f$, c'est-à-dire une fonction telle que, pour tout nombre standard x , la valeur prise par ${}^o f$ soit égal à l'ombre du nombre $f(x)$.

L'analyse non standard est une extension conservatrice de la mathématique

classique : tout théorème d'analyse non standard qui peut être exprimé sans faire appel aux nouveaux concepts est vrai en mathématique classique. En revanche, elle introduit des outils nouveaux qui résolvent des problèmes difficilement solubles dans l'analyse standard.

Un outil important de l'analyse non standard est ainsi la stroboscopie, que nous avons appliquée à la modélisation des poutres. La stroboscopie permet d'obtenir une description continue d'un système à partir d'une description initialement discrète. Elle donne des conditions suffisantes pour que, à un ensemble fini de points qui donne une forme approchée d'une courbe, on puisse associer une courbe continue qui est caractérisée par la solution d'une équation aux dérivées partielles. La courbe continue est l'ombre du modèle discontinu.

Ainsi le fil du tissu, qui était assimilé à une poutre continue dans l'approche micromécanique, est idéalisé par une succession de tiges droites indéformables, connectées par des ressorts qui en constituent les articulations.

Chaque tige est soumise à un couple exercé par les tiges adjacentes. De plus, chaque nœud est soumis à une force ponctuelle, qui représente l'action des fils transverses. Ce modèle, bien que simplifié, est très riche. Tout l'intérêt de la stroboscopie est d'utiliser la puissance d'un outil continu, tout en continuant de calculer sur des objets discrets.

À partir de l'énergie du système discontinu et d'un principe de minimisation d'énergie, l'analyse non standard procure un ensemble d'équations où interviennent les variables angulaires (les angles entre les poutres). On décrit le système continu équivalent en faisant tendre la longueur de chaque tige vers un réel très petit : le théorème de stroboscopie fournit alors une équation dont l'inconnue est la variable angulaire continue, qui décrit l'orientation de la poutre ondulée en chacun de ses points.

Par cette méthode, on obtient des informations que ne donnait pas l'analyse micromécanique : par exemple, on prévoit de façon plus précise le flambement des poutres soumises aux contraintes.

La description du comportement des textiles par la mécanique des poutres ondulées (micromécanique ou non standard) s'applique à des textiles variés. Le cas de la toile que nous avons exclusivement considéré jusqu'ici est le plus simple, et la complexité de l'analyse est accrue pour des armures plus complexes, telles celle du sergé ou celle du satin (voir la page 36). Toutefois, dans le principe, on conserve la même méthode de transition d'échelles : l'énergie obtenue à l'échelle de la cellule de base doit, par sa forme, refléter le contenu microscopique de cette cellule. À l'échelle mésoscopique du matériau continu, on pourrait alors envisager une classification des structures textiles selon la nature et la forme de la densité d'énergie obtenue pour le matériau continu équivalent.

Les grandes perturbations

En revanche, les deux analyses précédentes ne s'appliquent qu'à des tissus peu déformés : la description par des poutres ondulées limite les calculs à de petites perturbations d'un tissu plan, sans décrire les gauchissements

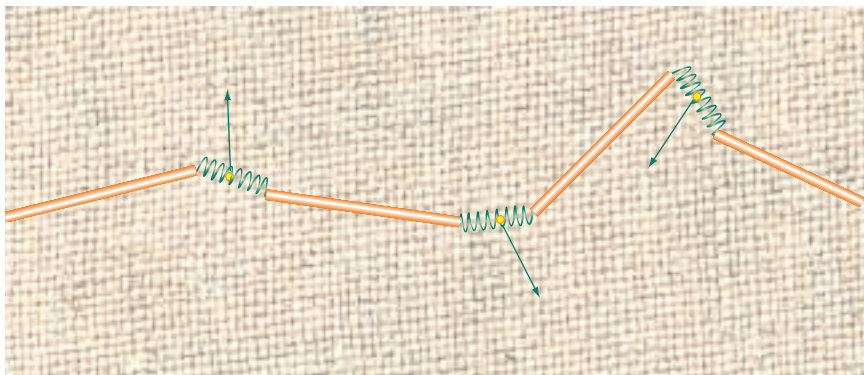
des pièces de tissu. Pour déterminer les comportements des tissus aux plus grandes perturbations, plusieurs approches ont été testées. La méthode des éléments finis, tout d'abord, divise les fils en nombreuses petites zones et calcule la déformation de chacune, à partir des lois de déformation des fils. Toutefois le nombre de calcul augmente considérablement avec la taille du tissu modélisé ; en pratique, les modélisations sont limitées à quelques centimètres carrés.

Une autre approche consiste à conserver la loi de comportement donnée par l'analyse précédente et à compléter la description : on considère une cellule du tissu sous la forme d'une boîte fictive qui entoure une ondulation du fil. La microrotation du modèle continu peut alors être identifiée avec la rotation de la cellule de base par rapport à l'axe fixe horizontal, et représente en quelque sorte l'ondulation du fil au deuxième ordre de grandeur. De même, il est raisonnable de penser que les bosselures présentes dans le premier stade de déformation en traction sont associées à des ondulations d'ordre supérieur.

Gauchissement et éléments finis

Considérons alors une contrainte appliquée aux extrémités du fil, et supposons que le fil soit inextensible : la longueur de la cellule de base ne varie pas. La déformation dans la direction de traction provient alors de la diminution de la microrotation, diminution qui résulte du moment induit par la contrainte appliquée sur la cellule de base. La contrainte externe se transmet en effet le long du fil, et la cellule de base est soumise à un couple de contraintes, ayant pour bras de levier la demi hauteur d'ondulation. Cet exemple révèle bien l'origine microscopique des variables cinématique (microrotation) et statiques (couples de contraintes) de la loi de comportement micropolaire. La courbe unidimensionnelle de traction obtenue par la théorie reproduit bien la courbe mesurée, et cette analyse rend compte de façon quantitative de la courbe de traction d'un tissu.

Une des difficultés de la réalisation de vêtements est liée au caractère non développable des surfaces textiles : la



5. LE FIL des tissus est considéré par l'analyse non standard comme un ensemble de tiges indéformables (*en rouge*) reliées par des ressorts (ainsi, on tient compte de l'élasticité des fils). Les contraintes exercées par les fils transverses sont représentées par des forces agissant entre les tiges, sur les ressorts (*en vert*). On obtient ainsi des équations qui décrivent la mécanique des fils (par exemple, la somme des sinus des angles que font les tiges avec l'horizontale est nulle). L'analyse classique obtient le comportement réel du fil en faisant tendre la longueur des tiges vers zéro, mais elle perd ainsi la possibilité de considérer des échelles intermédiaires. Quand l'analyse non standard fait tendre la longueur des tiges vers zéro, elle conserve la possibilité de décrire simultanément des phénomènes à des échelles différentes : par exemple, une raideur du fil variable (constantes de raideur des ressorts différentes selon les tiges).

surface ne peut être déployée sur un plan sans coupure. Il faut alors savoir où et comment découper les pièces à plat qui constitueront le patron afin de minimiser la quantité de tissu utilisée, tout en obtenant une résistance aux déformations satisfaisantes. De surcroît, les utilisateurs de tissus se fondent sur les gauchissements qui peuvent prendre les tissus au cours de leur assemblage : la souplesse du tissu est souvent mise à profit pour raccorder les différentes pièces.

Pour prévoir le comportement des tissus, aucune des approches précédentes ne suffit, car le gauchissement, par exemple, correspond à une déformation hors du plan du tissu. Aussi doit-on utiliser alors des techniques de

calcul numérique par éléments finis, qui divisent le tissu gaucho en un grand nombre de cellules, calculent les déformations pour chaque cellule et remontent ensuite au comportement global. L'analyse micromécanique, aux petites ou aux grandes perturbations, sert alors à décrire les petits éléments.

Aujourd'hui la méthode des éléments finis donne une bonne description de petites pièces de tissu et l'on cherche à étendre la taille des pièces décrites.

L'intégration d'une modélisation mécanique dans les programmes de conception assistée par ordinateur constituerait un progrès de taille dans l'industrie de la confection. C'est un travail en cours.

Jean-François GANGHOFFER est chercheur en mécanique et en science des matériaux à l'Institut de chimie des surfaces et interfaces (CNRS), à Mulhouse. Massimo MAGNO est chercheur à l'École nationale supérieure des industries textiles de Mulhouse et au Laboratoire de mathématiques et applications de l'Université de Haute-Alsace.

B. OLOFSSON, *A General Model of a Fabric as a Geometric-mechanical Structure*, in *Journal of the Textile Institute*, p. 541, 1964.

A. ASKAR et A.S. Cakmak, *A Structural Model of a Micropolar Continuum*, in *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 6, p. 583, 1968.

I.P. VAN DER BERG, *On the Relation between Elementary Partial Difference Equations and Partial Differential Equations*, in *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 92, pp. 235-265, 1999.

Massimo MAGNO, *Modèle mécanique du comportement de structure souple aux échelles mésoscopique et macroscopique : application aux matériaux fibreux*, Thèse de doctorat en sciences de l'ingénieur de l'Université de Haute-Alsace, 1999.

Corinne JUNG, *Analyse micromécanique du comportement d'un tissu, cas de l'armure toile*, Thèse de doctorat en sciences de l'ingénieur de l'Université de Haute-Alsace, 1999.