



L'Empire de la constante un

IAN STEWART

La protection efficace d'un empire requiert de solides connaissances en mathématiques.

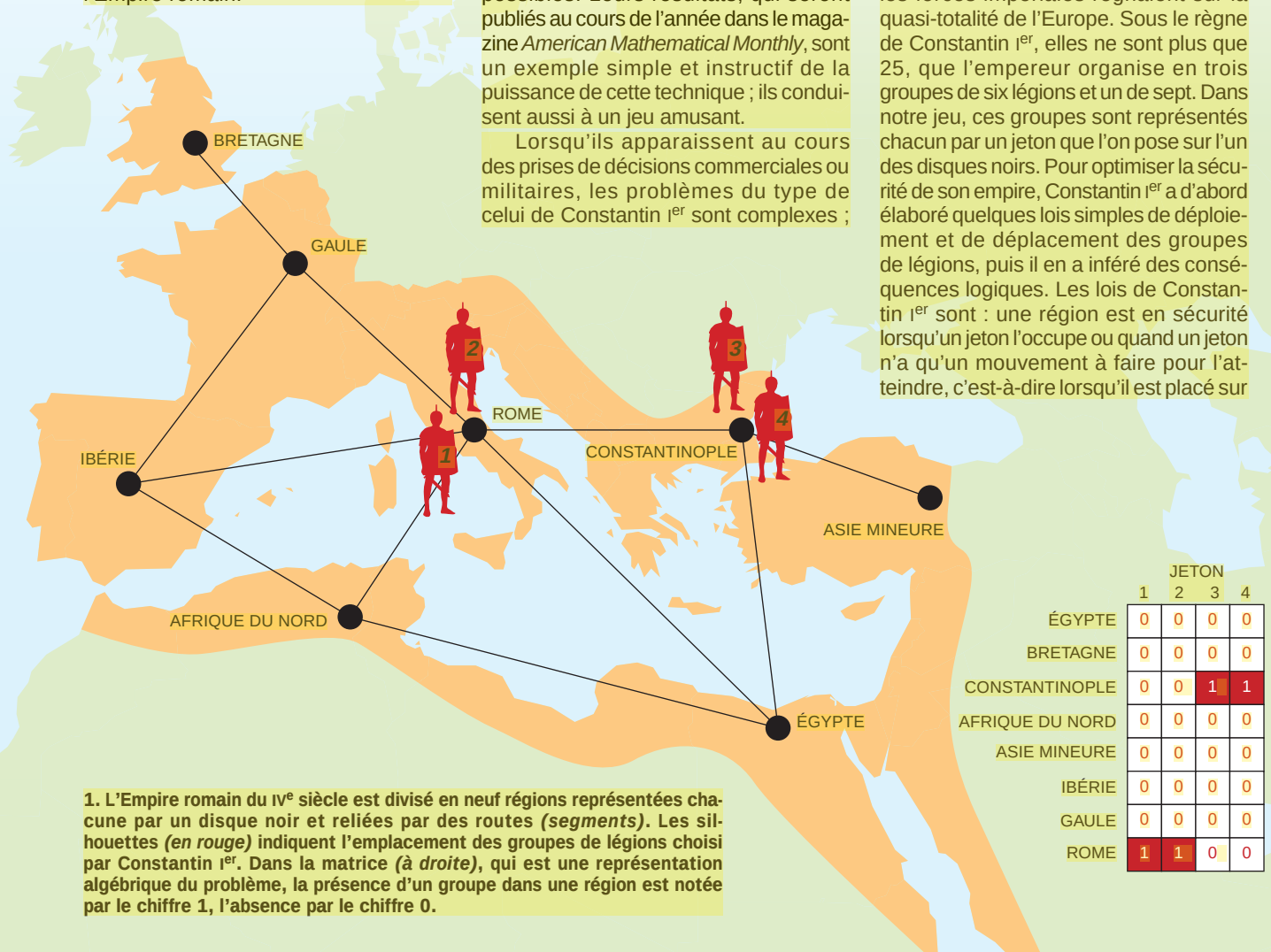
Pendant la Seconde Guerre mondiale, le général Douglas Mac Arthur (1880-1964) commandait les forces du Pacifique Sud contre les Japonais. Il ne déplaçait ses troupes d'une île à une île voisine que lorsqu'il avait assez d'hommes pour laisser sur l'île qu'il quittait une garnison suffisante pour la défendre en cas d'attaque. Cette stratégie était déjà employée il y a 16 siècles par l'empereur Constantin I^{er}, dit le Grand (270-337), pour assurer la sécurité de tout l'Empire romain.

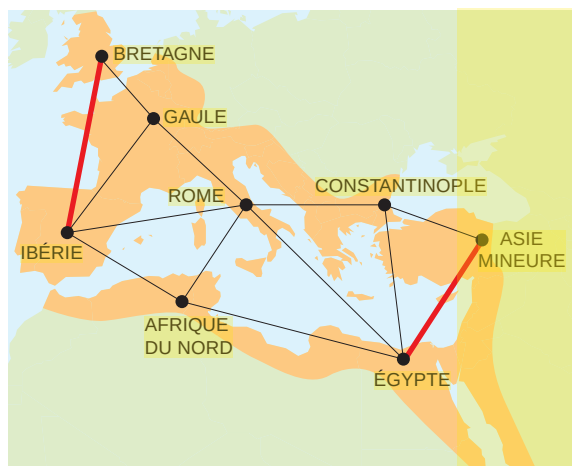
Constantin I^{er} avait choisi de placer deux groupes de légions à Rome et deux groupes de légions à Constantinople, la nouvelle capitale qu'il venait de donner à l'Empire : existe-t-il des déploiements de troupes plus efficaces ? En 1997, Charles ReVelle, de l'Université John Hopkins, et Kenneth Rosing, de l'Université Erasme de Rotterdam, ont étudié le problème de Constantin I^{er} grâce à une technique qui transforme le problème en un problème de variables booléennes, c'est-à-dire des variables qui n'ont que deux valeurs possibles. Leurs résultats, qui seront publiés au cours de l'année dans le magazine *American Mathematical Monthly*, sont un exemple simple et instructif de la puissance de cette technique ; ils conduisent aussi à un jeu amusant.

Lorsqu'ils apparaissent au cours des prises de décisions commerciales ou militaires, les problèmes du type de celui de Constantin I^{er} sont complexes ;

aussi, pour nous exercer, nous nous limitons d'abord à une carte simplifiée de l'Empire romain (voir la figure 1). Au début du IV^e siècle, l'autorité de Constantin I^{er} s'étend sur les deux rives de la Méditerranée, de l'Asie Mineure (la Turquie et la Syrie actuelles) à la Bretagne (l'Angleterre et le Pays de Galles). Divisons cette zone d'influence en huit régions, représentées chacune par un disque noir (Rome, Asie Mineure, etc.) et reliées par des routes (segments).

Au III^e siècle, fortes de 50 légions, les forces impériales régnaient sur la quasi-totalité de l'Europe. Sous le règne de Constantin I^{er}, elles ne sont plus que 25, que l'empereur organise en trois groupes de six légions et un de sept. Dans notre jeu, ces groupes sont représentés chacun par un jeton que l'on pose sur l'un des disques noirs. Pour optimiser la sécurité de son empire, Constantin I^{er} a d'abord élaboré quelques lois simples de déploiement et de déplacement des groupes de légions, puis il en a inféré des conséquences logiques. Les lois de Constantin I^{er} sont : une région est en sécurité lorsqu'un jeton l'occupe ou quand un jeton n'a qu'un mouvement à faire pour l'atteindre, c'est-à-dire lorsqu'il est placé sur





2. Deux voies supplémentaires compliquent le problème de Constantin I^{er} parce qu'elles augmentent le nombre de possibilités de déploiements des groupes de légions.

une région adjacente ; un jeton ne peut quitter une région que lorsqu'un autre jeton reste sur la région.

Muni de ces lois, comment disposer les quatre jetons afin de protéger soit tout l'Empire, soit la plus grande partie de celui-ci ? Avec la solution choisie par Constantin I^{er} (deux groupes sont stationnés à Rome et deux groupes sont à Constantinople), la Bretagne n'est pas en sécurité, car il faut au moins quatre mouvements pour l'atteindre : par exemple, un groupe se déplace de Rome en Gaule, un autre part de Constantinople pour Rome, puis continue vers la Gaule et enfin vers la Bretagne (la Gaule semble avoir été plus importante pour l'Empire que la Bretagne, territoire distant, froid et humide).

Comment améliorer la stratégie de Constantin I^{er} ? Toutes les régions peuvent être protégées avec au plus un mouvement si l'on place deux jetons à Rome, un en Bretagne et un en Asie Mineure. Pourtant, bien que cette solution protège bien Rome (deux groupes de légions), Constantin I^{er} ne l'a pas retenue, peut-être parce qu'il craignait un affaiblissement de l'Empire en cas de troubles sur deux fronts différents : un seul mouvement de troupes de Rome vers une autre région est possible, aucun second déplacement n'est permis.

Le problème se complique (voir la figure 2) quand deux nouvelles voies relient respectivement l'Ibérie à la Bretagne et l'Égypte à l'Asie Mineure. La solution améliorée protège toujours l'Empire tout entier avec un seul mouvement au plus. Cependant, les nouvelles connexions autorisent d'autres mouvements et je vous propose de chercher d'autres solutions (nous résoudrons le problème en fin d'article).

Pour étudier ce type de problèmes dans des cas réels, donc complexes, on

utilise des programmes informatiques fondés sur une formalisation algébrique. Dans une de ces formalisations, on établit un tableau, ou matrice, dont les lignes correspondent aux régions et les colonnes aux jetons. La matrice du problème de Constantin I^{er} a donc quatre colonnes et huit lignes. On note la présence d'un jeton dans une région par le chiffre 1, son absence par le chiffre 0 (voir la figure 1). Les stratégies sont alors des règles de transformation des coefficients de la matrice. Les problèmes de ce type sont nommés problèmes à variables booléennes, car les variables n'ont que deux valeurs possibles : zéro ou un.

Sans considérer les détails techniques, notons que la méthode de C. ReVelle et de K. Rosing divise le problème en deux. Dans le premier, on ignore la contrainte de quatre jetons et l'on cherche le nombre minimal de jetons pour assurer la sécurité de toutes les régions en un mouvement au plus. Lorsque la réponse est supérieure à quatre, le problème de Constantin I^{er} est sans solution. Puis le programme cherche le plus grand nombre de régions que l'on peut protéger en un mouvement au plus avec quatre jetons.

Les deux problèmes encadrent celui de Constantin I^{er} et indiquent d'une part l'existence d'une solution avec quatre pièces (dans notre exemple, elle existe) et, d'autre part, la possibilité de recourir à moins de jetons (dans notre exemple, c'est impossible). Elles résolvent ainsi n'importe quel problème de déploiement de ce type. Pour la seconde version du problème de Constantin I^{er}, il existe six solutions (le nombre de jetons à placer dans la région citée est indiqué entre parenthèses) :

1. Ibérie (2) ; Égypte (2).
2. Ibérie (2) ; Constantinople (2).
3. Ibérie (2) ; Asie Mineure (2).
4. Bretagne (1) ; Rome (1) ; Asie Mineure (1).
5. Bretagne (2) ; Égypte (2).
6. Gaule (2) ; Égypte (2).

En 407, les successeurs de Constantin I^{er} ont perdu la Bretagne. Cette perte ne s'explique certainement pas par notre modèle simple, mais on ne peut s'empêcher de penser qu'avec de meilleures connaissances en mathématiques, Constantin I^{er} aurait été meilleur stratège et l'Empire romain aurait duré un peu plus longtemps !

Ce magazine vous intéresse !



Vous y trouverez :

- ☐ Sciences-actualités
- ☐ L'actualité en astronomie
- ☐ Les actualités biomédicales
- ☐ Nouvelles de l'environnement
- ☐ Le texte intégral des conférences du samedi
- ☐ Le commentaire des expositions permanentes et temporaires
- ☐ Le programme des activités du Palais de la découverte

Je souscris un abonnement à la

REVUE DU PALAIS DE LA
DÉCOUVERTE

Je joins mon règlement par chèque
à l'ordre du

PALAIS DE LA DÉCOUVERTE
(CCP 9065 48 J PARIS)

Tarif France : 170 F (10 numéros par an)

Tarif étranger : 200 F

par mandat international uniquement
(par avion, supplément de 80 FF)

Abonnement de soutien : 230 F

Nom (M., Mme, Mlle) :

Prénom :

Adresse :

.....

Ville :

Code postal :

Profession :

à retourner avec votre règlement à
Revue du PALAIS DE LA DÉCOUVERTE
Av. Franklin-D.-Roosevelt - 75008 Paris.
Tél. : 01 40 74 80 0