

Indécidable

Ces derniers mois, Jean-Paul Delahaye nous a parlé des indécidables qui existent dans les mathématiques (voir *Pour la Science*, novembre et décembre 1999). À ce sujet, j'ai l'impression que sous le terme indécidable se cachent deux sortes d'énoncés. Les «vrais» indécidables, c'est-à-dire des énoncés qui ne peuvent être démontrés dans un système axiomatique, mais qui peuvent l'être dans un autre plus vaste, comme celui de l'Hydre de Lerne dans les systèmes de Peano et de Z-F. Les «faux» indécidables, que j'aurais envie d'appeler «arbitrairement décidables». Par exemple, si l'on refuse l'axiome de l'infini, «N» n'est pas un ensemble, car, dans ce cas, il est isomorphe à la collection de tous les ensembles. Au contraire, si l'on accepte cet axiome, il le devient. Si les deux systèmes d'axiomes qui conduisent à ces deux affirmations contradictoires sont cohérents, cette affirmation est considérée comme indécidable. Le principe est le même pour l'hypothèse du continu (indécidabilité démontrée par Paul Cohen). Si l'on pose que la collection de tous les ensembles définissables par une formule est égale à celle de tous les ensembles constructibles (je crois), cette hypothèse est vraie et, sinon, elle est fausse (théorie des ensembles, J.-L. Krivine). Étant donné que la théorie Z-F ne pose en axiome ni l'un ni l'autre, on peut décider arbitrairement de sa valeur de vérité en prenant soit l'un, soit l'autre, car cet axiome est indépendant de ceux de Z-F. Il faut bien sûr pour cela que les deux systèmes en question soient cohérents, ce qu'on ne sait pas. En conclusion, j'aimerais savoir si je me trompe ou s'il y a vraiment deux sortes d'indécidables.

Nicolas MICHEL, Caen

Réponse de Jean-Paul Delahaye

Il y a certainement de nombreuses catégories d'indécidables, et toutes sortes de classifications en ont déjà été proposées. Toutefois, celle que vous défendez entre «vrais indécidables» et «faux indécidables» est beaucoup plus philosophique que mathématique.

Ce n'est qu'une fois constaté que d'autres moyens permettent de prouver le résultat sur l'Hydre de Lerne que vous proposez de le classer parmi les «indécidables vrais».

N'importe quel énoncé indécidable dans un système devient décidable dans un système bien choisi. Pour parler d'indécidable vrai, il faut donc disposer d'un moyen d'évaluer les systèmes formels et de les classer en «systèmes formels vrais» et «systèmes formels faux». Mais on est alors revenu au point de départ ! La position philosophique appelée «réalisme ensembliste» consi-

dère qu'il y a une vérité mathématique objective concernant les ensembles et, en conséquence, concernant la grande majorité des questions mathématiques, et cela indépendamment des moyens que nous avons ou que nous n'avons pas de savoir ce qui est vrai. À partir d'une telle position, on peut justifier votre classification, mais il faut savoir qu'elle n'est pas partagée par tout le monde.

Le problème qu'indirectement vous soulevez par votre question est celui même de la philosophie des mathématiques, problème à propos duquel de nombreuses conceptions s'opposent encore aujourd'hui et qu'on ne résout pas par de simples considérations mathématiques.

Notons aussi que l'analyse non standard est née de la considération des modèles non standards de l'ensemble des entiers, c'est-à-dire de l'ajout au système formel de l'arithmétique de la négation d'un indécidable dont vous qualifiez la négation de vraie. Cela montre que, parfois, la prise en considération d'axiomes s'opposant à l'intuition engendre de nouveaux domaines mathématiques aussi intéressants que ceux obtenus en n'ajoutant que vos «indécidables vrais». Le monde mathématique est riche dans toutes sortes de directions et il n'est pas impossible que tout système cohérent soit intéressant même si, dans un premier temps, il apparaît contraire à l'intuition.

Recherche et liens

L'article sur la «Recherche intelligente sur l'Internet» (voir *Pour la Science*, août 1999) présente une approche digne d'intérêt en proposant d'utiliser les liens hypertexte afin d'améliorer la performance des moteurs de recherche sur Internet. Si l'argumentation théorique présentée semble convaincante, la réalité et les expériences empiriques semblent dévoiler une toute autre perspective.

En effet, depuis plusieurs années, de nombreux efforts ont été consentis pour mettre au point des collections de documents pour lesquelles on dispose d'un ensemble de requêtes et, pour chaque requête, la liste des documents pertinents dans le corpus considéré. Nous pouvons ainsi évaluer une stratégie de dépistage en utilisant ces collections afin de vérifier expérimentalement si une stratégie s'avère meilleure qu'une autre. Malheureusement, rares sont les collections qui possèdent des liens entre documents (par exemple, les liens de citation bibliographique) ou des liens hypertexte.

En ce qui concerne les liens de référence bibliographique, nous avons constaté, dans le meilleur des cas, une augmentation de 5 à 8 pour cent de la qualité de réponse d'un moteur

de recherche. Certes, ces expériences ont été menées sur une collection de taille réduite de 3 204 documents et avec 50 requêtes. Ainsi, cette première expérience tend à démontrer les limites dans le recours aux liens de référence bibliographique, liens que l'on peut estimer comme de meilleure qualité ou portant une information plus précise et pertinente sur la relation entre deux documents que les liens hypertexte du Web. En effet, ces derniers sont très souvent des aides à la navigation et, dans ce cas, n'ont pas la vocation d'établir un rapprochement sémantique entre des pages Web.

Mais le Web, par sa taille et ses très nombreux liens, n'est-il pas une collection très différente ? Les stratégies de recherche habituelles fonctionneraient-elles aussi bien dans un tel environnement ? Et les liens, dans ce cas précis, ne seraient-ils pas plus utiles au dépistage de l'information ? Une première réponse vient d'être apportée par la dernière conférence TREC qui s'est déroulée en novembre 1999. Sur la base d'une collection de 247 491 pages Web, accompagnée de 100 requêtes, une vingtaine d'équipes de recherche ont proposé différentes approches.

Les conclusions obtenues indiquent en premier lieu que les modèles de dépistage de l'information fonctionnant bien sur d'autres corpus apportent des réponses de bonne qualité pour le Web. Deuxièmement, les liens hypertexte du Web n'augmentent pas de manière significative la qualité de la réponse obtenue. Troisièmement, les moteurs de recherche utilisant exclusivement les liens hypertexte ont une qualité de réponse significativement moins bonne qu'une stratégie classique de recherche. En résumé, les liens hypertexte actuels n'augmentent pas la performance des moteurs de recherche. Ainsi, si une page est pointée par de nombreuses autres pages, on peut inférer que cette page appartient à un site populaire, mais on ne peut pas en induire qu'elle contient des informations de bonne qualité ni qu'elle doit être favorisée dans l'extraction de l'information du Web. Cette constatation ne nous empêche pas d'imaginer d'autres stratégies de recherche recourant aux liens hypertexte ou d'utiliser ces derniers dans d'autres buts (classification automatique, recherche de communautés d'intérêt, etc.).

Jacques SAVOY, Neuchâtel (Suisse)

Écrivez à *Pour la Science* vos réactions, vos commentaires et vos réflexions sur l'actualité scientifique et vos relations avec la science. L'adresse de *Pour la Science* sur Internet est : tribune@pourlascience.fr. Découvrez d'autres contributions de lecteurs sur le site Web www.pourlascience.com.

JEU-CONCOURS N° 68

PIERRE TOUGNE

Montre de mathématicien

L'inégalité de la longueur de l'aiguille des heures et de celle des

minutes dans une montre est-elle une nécessité ou une commodité ? Un mathématicien dont l'œil avait une acuité telle qu'il pouvait mesurer parfaitement les angles que faisaient les deux aiguilles identiques m'a affirmé qu'avec cette montre spéciale il pouvait connaître l'heure exacte entre minuit et midi (exclu), sauf dans certains cas en nombre fini où il y avait une ambiguïté entre deux heures possibles. Cet ensemble de mesure nulle était négligeable pour le mathématicien...



En effet, si la montre du mathématicien indique l'heure comme ci-contre, il est deux heures et non 0h10, car dans ce cas l'une des deux aiguilles ne peut se trouver exactement sur 12. Comment fait le mathématicien pour connaître l'heure ? Combien y a-t-il de positions ambiguës entre minuit et midi ? Quelles sont, dans ces cas particuliers, les ambiguïtés minimale et maximale ?

Envoyez vos réponses aux questions à *Pour la Science*, 8, rue Férou, 75278 Paris Cedex 06. Parmi les réponses exactes reçues pendant le mois de février 2000, dix gagnants tirés au sort recevront un livre.

RÉPONSE AU JEU-CONCOURS N° 66

Chaque enfant doit recevoir neuf tonneaux et $(9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4)/5 = 18$ quarts de tonneaux de vin. Si l'on désigne par x, y, z, t, u les nombres de tonneaux de chaque type (plein, trois quart plein, demi-plein, au quart plein et vide), que reçoivent respectivement les héritiers. Nous devons avoir :

$$4x + 3y + 2z + t = 18 \text{ et } x + y + z + t + u = 9.$$

La résolution de ce système de deux équations à cinq inconnues en nombres entiers différents de zéro conduit aux huit solutions représenté sur le tableau ci-dessous.

Parmi ces huit solutions, nous devons en choisir cinq différentes, mais comme nous ne disposons que de neuf tonneaux

de chaque sorte, il faut que les sommes des x, y, z, t et u de ces cinq solutions valent 9. Nous pouvons tout de suite éliminer la solution E, car $z = 5$ et qu'il n'y a pas quatre autres solutions avec $z = 1$. Les sommes par colonne des sept solutions restantes sont 12, 13, 13, 13, 12, donc il nous faut éliminer deux solutions dont les sommes par colonne sont 3, 4, 4, 4, 3. La solution A ne peut être éliminée, car $x = 3$. Enfin, il n'est pas difficile de voir que seules B et H, C et G et D et F remplissent la contrainte précédente. Nous avons, par conséquent, aux 120 permutations près entre les enfants, trois solutions fondamentales seulement : (A, C, D, F, G) (A, B, D, F, H) et (A, B, C, G, H).

SOLUTIONS	x	y	z	t	u
A	3	1	1	1	3
B	2	1	2	3	1
C	2	1	3	1	2
D	2	2	1	2	2
E	1	1	5	1	1
F	1	2	3	2	1
G	1	3	1	3	1
H	1	3	2	1	2



Les fruits de l'invention

PIERRE POTIER

La rétribution des chercheurs inventifs réduit comme peau de chagrin.

Doit-on expliquer longuement pourquoi l'État a intérêt à promouvoir la découverte et l'invention ? La question essentielle est plutôt de savoir comment inciter les chercheurs, ingénieurs et autres inventeurs et découvreurs potentiels à chercher, trouver, puis protéger leurs inventions, et à récolter, éventuellement, le fruit de leurs travaux. Le parcours est long, jusqu'à la prise de brevets, et plus encore jusqu'à la perception de redevances, en cas d'exploitation. Il doit donc être facilité.

Si l'industrie a la responsabilité de ses innovations, l'invention par la recherche publique doit faire l'objet de débats. La France dispose d'un système de recherche publique important : le budget civil de recherche et de développement atteint 55 milliards de francs. Quelle est l'efficacité du système ? Elle se mesure à la quantité de connaissances nouvelles obtenues, et aux royalties des brevets d'invention. Choisissons arbitrairement d'évaluer la recherche de connaissance au nombre de prix scientifiques notables, tel le prix Nobel : si la physique connaît quelques succès, ainsi que la chimie, la biologie n'a pas fait ses preuves au cours des années récentes. D'autre part, le « retour sur investissement » est très faible, en termes de royalties, alors que les potentialités sont considérables dans les industries chimiques, pharmaceutiques, électroniques...

D'où la question initiale : comment promouvoir l'invention et la découverte ? Le pays et, notamment, l'administration de la recherche feraient une grave erreur s'ils se contentaient de proclamer *urbi et orbi* que les chercheurs doivent collaborer avec l'industrie ; les campagnes d'information doivent être soutenues par de puissantes incitations financières.

Il y a quelques décennies, alors que la France cherchait déjà des moyens d'augmenter la force d'innovation de sa recherche publique, 60 pour cent des redevances de brevets étaient allouées aux chercheurs ; le laboratoire recevait 20 pour cent des sommes perçues, et le CNRS les 20 pour cent restants. En 1978, le pré-

sident de la République de l'époque, Valéry Giscard d'Estaing, et le gouvernement avaient jugé cette incitation insuffisante, et ils avaient promulgué une loi, dite « loi Foyer » (Jean Foyer était alors Garde des Sceaux), qui prévoyait que les revenus de la propriété industrielle, représentés par les redevances perçues par l'exploitation de brevets, seraient taxés au régime fiscal préférentiel des « plus values à long terme » (comme les revenus d'actions) et non au régime de droit commun (celui de l'impôt sur le revenu des personnes physiques), moins favorable.

À l'époque, la différence de traitement était considérable : le taux des plus values à long terme était de 16 pour cent, et celui de l'impôt sur le revenu des personnes physiques pouvait, selon un barème progressif, atteindre plus de 45 pour cent (depuis, la pression fiscale a considérablement augmenté : le taux supérieur de l'impôt sur le revenu atteint 54 pour cent, et les prélèvements sociaux qui atteignent 10 pour cent se sont ajoutés au taux de 16 pour cent des plus values à long terme).

Que s'est-il passé depuis ? La situation n'a cessé d'empirer. Lorsque je fus nommé directeur général de la Recherche et de la Technologie, en juillet 1994, je découvris qu'aucun décret d'application de la « loi Foyer » n'avait été publié : 16 ans après ! Alors que le Conseil d'État a jugé, depuis longtemps, que l'État devait s'astreindre à publier tout décret d'application d'une loi au plus tard deux ans après la promulgation de celle-ci.

D'autre part, la fonctionnarisation des chercheurs, en 1983, a eu des conséquences néfastes pour l'incitation à l'innovation. En effet, à l'époque de la promulgation de la « loi Foyer », la plupart des chercheurs et ingénieurs du secteur public étaient des agents contractuels de l'État ; ils relevaient d'un régime d'enrichissement analogue aux chercheurs de l'industrie. La fonctionnarisation s'est accompagnée d'une réflexion de l'administration des finances sur la façon dont

ces nouveaux agents de l'État pouvaient s'enrichir. Cette administration a décidé de prendre des mesures dérogatoires pour traiter les revenus d'invention, qui ont été transformés en primes d'intéressement, déclarables en revenus. Pis encore, les taux de 60, 20 et 20 pour cent évoqués précédemment ont été respectivement changés (par des décrets pris en octobre 1996) en 25, 25 et 50 pour cent !

Plus généralement, l'administration des finances a fait prendre à l'État une série de mesures qui, de manière insidieuse, ont vidé la « loi Foyer » d'une grande partie de sa substance. L'État, devenu pingre, a démotivé les chercheurs, qui ont réduit leur activité industrielle.

Face à cette situation démotivante, un groupe interacadémique (entre l'Académie des sciences et l'Académie des sciences morales et politiques, dont fait notamment partie Jean Foyer) vient d'être constitué avec l'appui du ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie, et de son ministre, notre confrère Claude Allègre. Depuis qu'il est aux « affaires », C. Allègre a manifesté un intérêt constant pour tout ce qui touche à la créativité et aux applications de la science, mais le reste de l'appareil de l'État est-il convaincu qu'il faut appliquer et amplifier ces décisions de grand bon sens, et non les freiner ?

Il y va de l'intérêt supérieur du pays. Tant mieux si les chercheurs s'enrichissent ; simultanément ils polliniseront le tissu industriel, touristique, etc., et l'activité suscitée par leurs travaux conduira à la création ou au maintien d'emplois ! Depuis que les Phéniciens ont inventé le papier monnaie, la juste rétribution des efforts est possible. Hélas, l'administration n'est pas phénicienne : par jalousie ?

Pierre POTIER dirige l'Institut de chimie des substances naturelles, à Gif-sur-Yvette. Il est président de la Fondation de la Maison de la chimie, membre de l'Académie des sciences et Médaille d'or du CNRS.