



O.M.F.

Grandeur et décadence des arbres

ROLAND LEHOUCQ

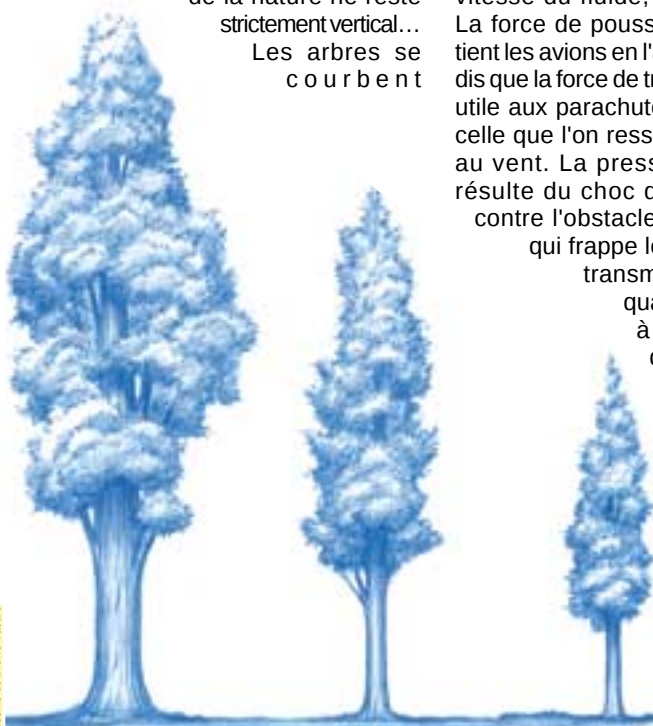
Le spectacle des forêts dévastées par la récente tempête interpelle le physicien : comment tant d'arbres ont-ils pu être cassés ou déracinés ?

Plusieurs dizaines de millions d'arbres ont été mis à mal par les vents de tempête qui balayèrent la France les 26 et 27 décembre 1999. Nous allons examiner les mécanismes physiques qui déséquilibrent les arbres, les cassent, voire les arrachent.

Même en l'absence de vent, un arbre ne peut croître indéfiniment, car le tronc doit résister à son propre poids : la pression qui s'exerce sur une section droite du tronc doit rester inférieure à la pression d'écrasement (quelques dizaines de millions de newtons par mètre carré). Ainsi, un arbre vertical dont la densité est de 0,8 (la plupart des bois flottent) pourrait atteindre une hauteur de six kilomètres avant de s'écraser sur son propre poids.

Apparemment aucun arbre de la nature ne reste strictement vertical...

Les arbres se courbent



Dessins de Bruno Vacaro

Le diamètre d'un tronc augmente comme la puissance 3/2 de la hauteur d'un arbre : les grands arbres ont proportionnellement un tronc plus gros que les petits.

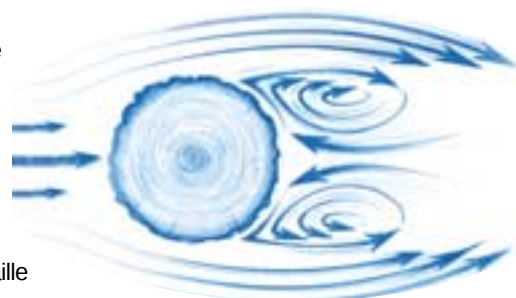
sous l'action du vent et la nécessité de résister aux forces de cisaillement limite la taille des arbres. La limite de rupture pour le cisaillement est identique à la pression d'écrasement, mais les contraintes de cisaillement sont bien supérieures aux forces d'écrasement de sorte que la limitation de taille est plus sévère.

LE VENT, SOURCE DE FORCE AÉRODYNAMIQUE

Tout corps plongé dans un fluide en mouvement subit une force dont une composante, perpendiculaire à la direction de la vitesse du fluide vue par l'obstacle, est la poussée, et l'autre, parallèle à la vitesse du fluide, est la traînée.

La force de poussée maintient les avions en l'air, tandis que la force de traînée, utile aux parachutes, est celle que l'on ressent face au vent. La pression de l'air résulte du choc des molécules d'air contre l'obstacle : chaque molécule qui frappe le tronc est déviée et transmet une partie de sa quantité de mouvement à l'arbre. Les chocs des molécules sur le tronc sont permanents et la somme de leur contribution engendre une pression dont la distribution autour du tronc crée la traînée.

Sur la surface d'un tronc d'arbre face au vent, la vitesse du fluide est quasi nulle, car l'air ne peut pénétrer dans le tronc. Dans un fluide en mou-



Lorsque le vent rencontre un tronc d'arbre, les filets d'air sont déviés. La couche d'air qui est au contact du tronc se décolle et à l'arrière du tronc existe une zone où la pression est inférieure à celle de la partie avant. De cette différence de pression résulte la force de traînée, responsable de l'arrachage.

vement, la pression est d'autant plus faible que la vitesse est grande (une grande vitesse augmente le volume d'une même masse de fluide et donc diminue la pression). Ainsi, la pression régnant sur la surface frontale du tronc est maximale, puisque la vitesse y est minimale. Comme les filets d'air sont déviés par le tronc, il se crée une dépression derrière l'arbre.

De cette asymétrie entre l'amont et l'aval résulte la traînée. Au total, la force de traînée subie par le tronc est le produit d'un coefficient de traînée (nombre sans dimension qui dépend à la fois de la direction du vent et de la forme du tronc), de la densité de l'air, de la section frontale et du carré de la vitesse du vent. En raison de cette variation avec le carré de la vitesse, la force exercée sur des arbres balayés par des vents de près de 200 kilomètres par heure est 16 fois celle exercée par un vent fort, mais assez fréquent, de 50 kilomètres par heure. On comprend aussi pourquoi les arbres dont la prise au vent (surface du tronc et surtout du feuillage) est la plus forte, tels les chênes, subissent une force supérieure. Un grand arbre attire-t-il le vent, comme le prétend un proverbe chinois ?

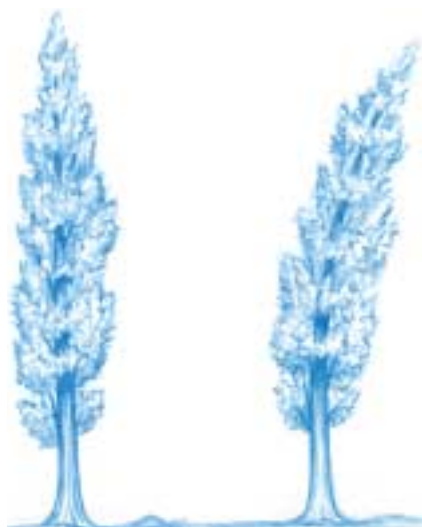
*Les vents me sont
moins qu'à vous redoutables.
Je plie, et ne romps pas.*

Du bout de l'horizon accourt avec
furie /Le plus terrible des enfants/Que
le Nord eût portés jusque-là dans
ses flancs.

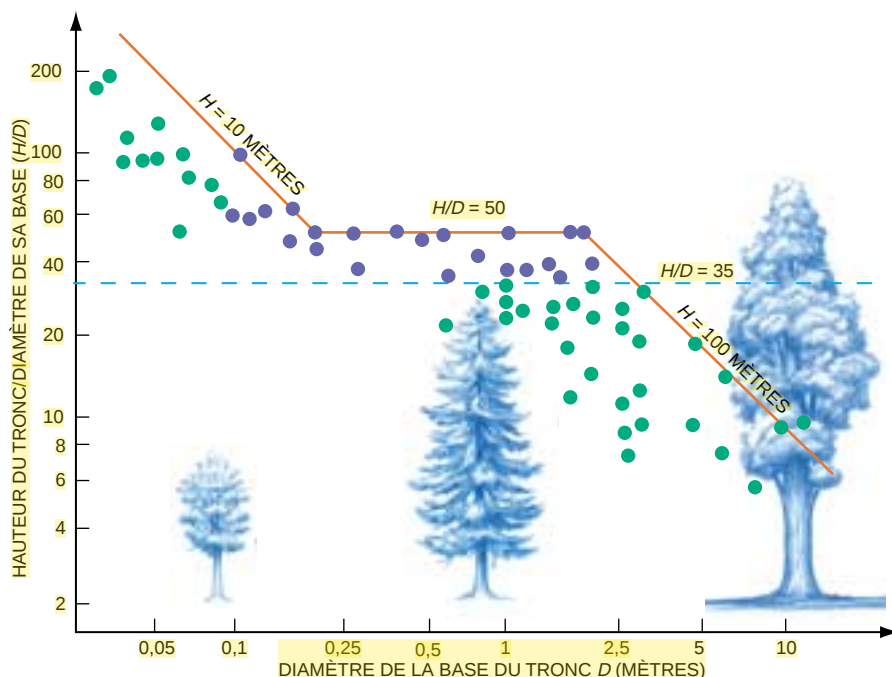
L'arbre se déforme selon sa nature et selon l'intensité de la contrainte. Dans un premier stade de déformation, la force et la déformation sont proportionnelles et, lorsque la force est supprimée, le tronc reprend sa forme initiale. Au-delà d'un seuil de contrainte, nommé limite élastique, la déformation augmente plus vite que la contrainte. De surcroît, en supprimant la contrainte, le tronc ne reprend pas sa forme initiale : la déformation est permanente. Cette limite élastique diminue avec l'âge de l'arbre : «Vieil arbre est mal à redresser». Quand la force augmente encore, la limite de rupture est atteinte et le tronc se brise.

Si le roseau plie et reprend sa forme initiale, la déformation maximale que peut subir un tronc de chêne, par exemple, avant de se rompre est limitée : quelques millièmes de sa taille. Les solides sont très rigides, car les liaisons chimiques entre les atomes qui les constituent leur imposent une séparation précise.

La tempête gronde, le chêne se déforme et se courbe. Dès lors, son centre de gravité n'est plus à la verticale de la base du tronc et il en résulte un moment additionnel dû à la gravité (le produit du poids par le bras de levier) qui accentue la déformation de l'arbre. L'arbre reste en équilibre tant que le moment de la force imposée par le vent et le moment du poids de l'arbre sont compensés par le moment de la force de rappel élastique qui traduit la «répugnance» de l'arbre à subir une déformation. La contrainte liée à la courbure du tronc est bien supérieure à la simple compression due au poids lorsque l'arbre est strictement vertical : c'est lorsqu'ils sont courbés par le vent que les arbres risquent



La flexion d'un arbre engendre un couple dû au poids, parce que le centre de gravité n'est plus à la verticale de la base du tronc.



La «hauteur relative» d'un arbre, H/D , ici indiquée en fonction de son diamètre, D , détermine sa résistance au vent. Les points correspondent à des arbres mesurés. La partie gauche correspond aux arbres fins, tandis que la partie droite correspond aux arbres à forte base. Par grand vent (rafales de 200 kilomètres par heure), les arbres situés au-dessus de la ligne horizontale $H/D = 35$ sont susceptibles d'être abattus (points violets). Les arbres très fins sont plus élastiques et, comme le roseau, ils plient mais ne rompent pas.

d'atteindre leur limite de rupture. Il en est d'ailleurs de même pour les cheminées ou pour les poteaux.

Pour des vents assez faibles, le moment de la force imposée par le vent peut être négligé devant le moment du poids et l'arbre adoptera à peu près la forme d'un arc de cercle de grand rayon de courbure. La condition d'équilibre mécanique de l'arbre (tous les moments des forces doivent se compenser) impose alors que le diamètre de sa base varie comme la puissance $3/2$ de sa hauteur : les arbres dont le diamètre varie plus lentement tombent et les arbres dont le diamètre varie plus vite tiennent, mais ne respectent pas le principe d'économie de la nature. Cette corrélation se retrouve dans d'autre aspect du monde vivant, car elle gouverne aussi les dimensions longitudinales et transversales des os de mammifères, par exemple.

LA HAUTEUR RELATIVE

Par vent fort, son moment l'emportera et les contraintes engendrées dans le tronc de l'arbre dépasseront parfois la limite de rupture du bois. Pour un vent soufflant à 140 kilomètres par heure (environ 40 mètres par seconde) et contre des arbres dont le feuillage est peu développé, par exemple des peupliers, les arbres qui sont plus de 50 fois plus haut que le diamètre de leur tronc sont abattus par le vent. Cette vitesse de 40 mètres par seconde correspond à des vents fréquents en France ce qui explique que les arbres dont la hauteur relative (le quotient de la hauteur du tronc et de son diamètre à la base) est plus grand que 50 n'existent pas, excepté pour

Le vent
redouble ses efforts,
Et fait si bien qu'il déracine
Celui de qui la tête au Ciel était voisine, et
dont les pieds touchaient à l'Empire des
Morts.
Jean de La Fontaine

des petits arbres, qui sont les plus jeunes et dont le bois est plus souple. Pour des vents plus violents, la hauteur relative au-delà de laquelle l'arbre est abattu diminue. Ainsi s'explique que dans les régions touchées par cette dernière tempête, dont les rafales ont atteint 200 kilomètres par heure, beaucoup d'arbres dont la hauteur relative était supérieure à 35 aient été abattus.

Un modèle plus complet devrait prendre de nombreux effets supplémentaires : l'écrantage des petits arbres par les grands, l'effet domino (un arbre abattu en fait tomber un autre), etc. De surcroît, le fait que de fortes pluies aient mouillé la terre est sans doute pour beaucoup dans la proportion d'arbres arrachés (les racines tenaient moins bien dans le sol) par rapport à celle d'arbres cassés.

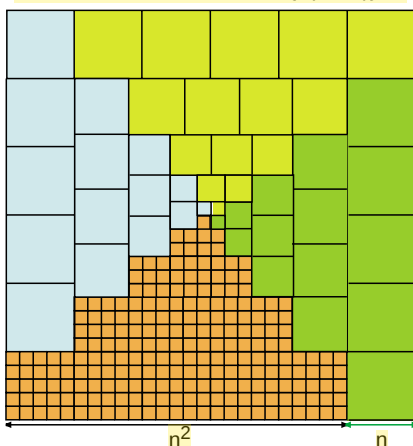
Roland LEHOUCQ est astrophysicien au Service d'astrophysique du CEA.

A. MINEYEV, *Why do trees grow so tall, but not taller?*, in *Quantum*, janvier/février 1994.

T.A. MACMAHON, *The mechanical design of trees*, in *Scientific American*, juillet 1975.

S. VOGEL, *Life's device*, Princeton University Press, 1988.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \{n(n+1)\}^2/4$$



Raccourcis dans les démonstrations

JEAN-PAUL DELAHAYE

La concision risquée des preuves humaines contraste avec le bavardage impraticable des preuves formelles.

Comment savoir si une démonstration est juste ? On imagine qu'il suffit qu'un mathématicien prenne la peine de la lire soigneusement, ligne par ligne, après s'être informé des définitions et des résultats connus qui peuvent y être utilisés. Si certaines questions sont non résolues, ce qui bien sûr est le cas, nous saurions parfaitement lesquelles, et le travail des chercheurs consisterait uniquement à résoudre ces énigmes répertoriées. Partout en mathématiques régnerait la certitude.

Cette situation, si elle était vraie, opposerait catégoriquement les mathématiques à la physique où rien n'établit définitivement une théorie, laquelle n'est qu'une hypothèse susceptible d'être mise en cause par de nouvelles données. On sait ainsi qu'on ne prouve pas une loi physique, qui est un énoncé général, à partir d'observations et d'expérimentations, qui ne sont que des énoncés particuliers.

Les logiciens soutiendront la vision idéalisée des mathématiques en maintenant que, depuis le début du siècle, on dispose de systèmes codifiés pour écrire des démonstrations qu'on appelle des systèmes formels. Lorsqu'on écrit une preuve avec l'un de ces systèmes, un ordinateur peut en vérifier la justesse sans intervention humaine. La justesse d'une preuve formelle, disent les logiciens, est mécaniquement vérifiable et ne demande aucune intelligence. Or une multitude de raisons compliquent le tableau idéal et atténuent l'image trop belle d'une science mathématique sans états d'âme, sans disputes, sans erreurs où l'unanimité se ferait sur toute question et où les désaccords pourraient se régler en prenant des ordinateurs pour arbitres.

Nous allons évoquer les difficultés rencontrées pour écrire des démonstrations formelles mécaniquement vérifiables. Ces difficultés ne signifient pas que les sys-

tèmes codifiés pour l'écriture des démonstrations sont inutiles ou insatisfaisants – personne n'envisage aujourd'hui de s'en passer, et c'est à tort qu'on évoque les théorèmes d'incomplétude de Gödel comme arguments contre les formalismes (voir les rubriques des mois de novembre et décembre 1999). Les difficultés signifient simplement que l'utilisation des formalismes logiques est beaucoup plus délicate qu'il n'y paraît et que le monde des mathématiques déborde d'une complexité qu'on ne sait pas, en pratique, enfermer dans les boîtes aseptisées que sont les systèmes formels des logiciens.

Dans l'introduction de son grand traité de mathématiques, Nicolas Bourbaki a exprimé très lucidement ce point de vue au cœur de la conception moderne des mathématiques : «...conservant toujours présente, comme une sorte d'horizon, la possibilité d'une formalisation totale, notre Traité vise à une rigueur parfaite. [...] Du fait que nous cherchons à nous tenir constamment aussi près d'un texte formalisé qu'il semble possible sans longues et insupportables, la vérification, en principe, est aisée ; les erreurs (inévitables en pareille entreprise) peuvent être localisées sans excessive perte de temps, et le risque de les voir entacher de nullité un chapitre ou un Livre entier demeure très faible.»

Certaines figures de cet article reproduisent des démonstrations sans mots qui viendront compléter celles déjà proposées dans cette rubrique en février 1998. Ces démonstrations graphiques illustrent une idée forte : à côté de la présentation des démonstrations en langue vernaculaire ou formelle, une exposition silencieuse et géométrique des preuves mathématiques est parfois possible.

Les preuves réelles qu'écrivent les mathématiciens sont très différentes des preuves formelles pour une première raison : l'utilisation généralisée d'abréviations. Parmi les abréviations, il y a celles, bénignes, qui n'introduisent aucune ambiguïté. Le mathématicien indiquera par exemple que, pour gagner un peu

1. INDIGESTES SYSTÈMES FORMELS

•52.2. $\vdash. 1 \in Cls$

Dem.

$\vdash. \bullet 52.1. \supset \vdash : \alpha \in 1. \supset. (\exists x). \alpha = t'x.$

[•51.11] $\supset. (\exists x). \alpha = 2(z=x).$

[•20.54] $\supset. (\exists x, \phi). 2(\phi!x) = 2(z=x). \alpha = 2(\phi!x).$

[•10.5] $\supset. (\exists \phi). \alpha = 2(\phi!x).$

[•20.4] $\supset. \alpha \in Cls : \supset \vdash. Prop$

•52.21. $\vdash. \Lambda \sim \epsilon 1$

Dem.

$\vdash. \bullet 52.16. \supset \vdash : \alpha \in 1. \supset. \exists ! \alpha :$

[•24.63] $\supset \vdash : \Lambda \sim \epsilon 1$

La codification des démonstrations rend celles-ci testables par ordinateur, mais pas très agréables aux humains. L'un des premiers systèmes entièrement codifiés de preuves est celui de B. Russell et A. Whitehead, qui ont essayé de rester le plus près possible du formalisme qu'ils définissaient. Voici un extrait de leur ouvrage *Principia Mathematica*, proposé ici pour en montrer l'intérêt... esthétique. On reconnaît en 52.21 un énoncé qui signifie que l'ensemble vide (le V retourné) n'est pas élément de 1 qui, par définition, dans ce système, est la classe de toutes les classes ayant un seul élément. Chaque énoncé est soigneusement justifié par sa preuve donnée juste après, qui en permet, en théorie, la vérification mécanique. Pas un mot n'apparaît.