

3. LE VIDE ET LES ENTIERS DE VON NEUMANN

Un exemple remarquable de situation où un formalisme élégant conduit à des notations impraticables si on ne les accompagne pas de notations raccourcies est celui des entiers de von Neumann, qui permettent en théorie des ensembles de construire les nombres à partir de l'ensemble vide. Ceux-ci sont définis en posant $0 = \{\}$ (l'ensemble vide), $n + 1 = n \cup \{n\}$, ce qui donne :

$$0 = \{\}$$

$$1 = \{\{\}\}$$

$$2 = \{\{\}, \{\{\}\}\}$$

$$3 = \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$$

$$4 = \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}$$

$$5 = \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}\}$$

$$6 = \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}\}\}$$

$$7 = \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}\}\}\}$$

$$\{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}\}\}\}\}$$

$$\{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}\}\}\}\}\}$$

Imagine-t-on combien il serait pénible d'écrire les tables de multiplication dans ce formalisme !

de place, il note a^7 à la place de $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$, ou $\sin^{(5)}(x)$ à la place de $\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))$; les parenthèses autour du 5 évitent la confusion entre $\sin^{(5)}(x)$ et $\sin^5(x)$.

Si seules de telles abréviations étaient utilisées, il serait facile de traduire une preuve humaine en preuve formelle (et donc de la vérifier mécaniquement). On demanderait à l'ordinateur de remplacer systématiquement chaque notation abrégée par sa version complète et, même si cette pratique allonge le texte, ce ne serait pas une gêne sérieuse pour l'ordinateur chargé de le contrôler.

LES RACCOURCIS ET LES ABRÉVIATIONS

Malheureusement la plupart des abréviations sont ambiguës, et seul le contexte permet d'en déterminer la signification. La notation dx , par exemple, peut représenter le produit de la variable d par la variable x , ou bien la différentielle de x utilisée en calcul intégral. Le mathématicien Littlewood cite l'anecdote où un professeur qui écrivait le polynôme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ commentait la formule en disant : « e n'est pas nécessairement, mais peut l'être, la base des logarithmes naturels. » Le signe $+$ désigne l'addition entre entiers ou celle entre matrices ou toutes sortes d'autres opérations (il n'est pas rare que, dans un même texte mathématique, plusieurs signes $+$ soient utilisés, chacun se référant à un concept différent). La notation i , selon le texte, désignera un entier naturel, ou le nombre complexe dont le carré vaut -1 , ou autre chose encore.

On trouve aussi fréquemment des indications qui introduisent une ambiguïté : «Le paramètre k sera fixé dans le reste du paragraphe, et à la place de $f_k(x)$ nous écrirons $f(x)$. » Les textes mathé-

matiques sont remplis de ces raccourcis qui rendent difficile la traduction dans un langage formel. Les mathématiciens en sont conscients, comme cette citation de Nicolas Bourbaki (*Algèbre linéaire*, Chapitre II, p. 53) l'atteste : «La notation $u \otimes v$ pourra donc prêter à confusion, et il sera nécessaire que le contexte indique s'il s'agit d'un produit tensoriel ou d'une application linéaire. » Mille autres exemples pourraient être donnés.

PARTOUT DES MANQUES

Toutes ces abréviations, après un travail attentif et minutieux, pourraient être traquées et supprimées du texte d'une démonstration, alors qu'en revanche les abréviations dans la structure même des démonstrations sont bien plus graves. Les textes mathématiques en sont pourtant truffés.

On comprend ce que signifie «le lecteur vérifiera sans peine que le chiffre des unités de 2^{100} est 6» ou «quand on développe $(x + 4x^5)^{12}$, le coefficient de x^{20} est 1056» ; en prenant une feuille de papier, le lecteur (supposé patient) s'assurera de la justesse de ce qui est affirmé, et le bout de démonstration qui manque – un calcul – sera ainsi reconstitué.

Parfois le calcul qui permettrait la vérification est impossible à faire sans l'utilisation d'ordinateurs munis de programmes particuliers. Imaginez ce que vous devriez faire pour vous assurer de l'affirmation «il y a 9,98 % de '7' parmi le premier million de décimales du nombre π » (ce qui est un énoncé vrai qu'on trouve dans certains ouvrages). On doit faire confiance à l'auteur qui affirme cela, ou travailler des heures, voire des jours, pour le vérifier.

Lorsqu'il ne s'agit que de calculs, combler le trou présent dans la preuve humaine ne semble pas totalement insurmontable.

En revanche, comment ne pas être inquiet quand le mathématicien, après avoir donné la démonstration du théorème dans le cas b positif, écrit : «le cas b négatif se traite facilement» ou «est analogue»? Va-t-on y arriver? Comment ne pas devenir franchement anxieux quand, dans le texte d'une démonstration, on découvre le laconique et pourtant très fréquent «Laissez en exercice au lecteur»?

Voici quelques exemples de ce type, tirés du livre d'*Algèbre linéaire* du traité Bourbaki. D'abord le classique : «On vérifie facilement que...» (chapitre I, p. 107). Une telle phrase ne semble pourtant pas pouvoir guider le lecteur. Pas plus d'ailleurs que celle-ci qui, si vous rencontrez un obstacle dans la démonstration omise, risque de vous faire désespérer de vous-même : «La démonstration est encore plus simple pour...» (Chapitre II, p. 85).

L'inévitable «on voit que...» fait bien sûr partie de l'arsenal démonstratif du traité (Chapitre III, p. 158). Lorsque des précisions sont données, elles ne sont pas nécessairement parlantes, et l'on n'est pas certain de pouvoir s'en sortir avec celles, cryptiques, de la démonstration de la proposition 3 du Chapitre II, p. 39, qui se termine par : «La conclusion résulte donc de la déf. 1 et de II, p. 10, prop. 5(ii). » Plus délicate encore est l'étonnante démonstration en une ligne d'un énoncé qui en occupe quatre : «Cela résulte de E, III, p. 29, prop. 12, et E, III, p. 42, cor. 1» (Chapitre III, p. 87).

ON PEUT MÊME OMETTRE LES THÉORÈMES!

Les non-mathématiciens seront étonnés, mais les raccourcis, même dans les meilleurs traités, peuvent s'étendre au-delà des démonstrations. Ainsi, parfois, les définitions et les énoncés eux-mêmes sont omis. Toujours dans le traité de N. Bourbaki, on trouvera l'admirable : «Nous laissons au lecteur le soin de formuler les définitions et remarques analogues pour les systèmes d'équations linéaires à gauche» (Chapitre II, p. 146), et aussi : «On laisse au lecteur le soin de définir un système projectif d'anneaux... et de vérifier que...» (Chapitre II, p. 146). Pourquoi ne pas confier au lecteur le soin d'écrire le chapitre suivant tout seul?

Ces omissions ne sont pas sans danger, et beaucoup de mathématiciens vous diront que, même si elles paraissent inévitables, elles restent périlleuses. Il est fréquent en effet que des erreurs se produisent dans les textes mathématiques, précisément en ces endroits incomplètement détaillés par un mathématicien pressé et sincèrement persuadé que la démonstration est possible à partir des indications succinctes qu'il propose à titre d'argument.