

(par exemple, la non-dénombrabilité des nombres réels ou l'impossibilité de la quadrature du cercle) ne doivent pas être pris plus au sérieux que les tentatives de réaliser un mouvement perpétuel qui obsède les inventeurs du dimanche. Oui, en mathématiques aujourd'hui, l'unanimité existe concernant la justesse, et aucune controverse véritable n'a plus cours.

PROGRÈS DANS LA FORMALISATION

Bien que peu de mathématiciens se soucient au quotidien de la formalisation complète de leurs preuves, les progrès faits sur ces questions ne sont pourtant pas négligeables.

Poincaré se moquait du fait que, pour écrire 1 dans le formalisme du système des *Principia* de Russell et Whitehead (le premier système formel complet permettant l'écriture d'un volume important de mathématiques), il fallait un grand nombre de symboles, ce qu'il trouvait absurde. Passionné par le traité de *Mathématiques* de N. Bourbaki, dont les premières pages sont constituées par la description détaillée du système formel sur lequel le traité s'appuie ensuite, un ami s'était amusé à écrire explicitement la suite des symboles représentant l'ensemble des parties d'un ensemble sans utiliser aucune abréviation. Le tout, une fois transcrit sur un rouleau de papier, avait une longueur de trois mètres.

Les systèmes formels d'aujourd'hui ne présentent pas tous ces défauts ridicules, car, dans le but de les manipuler, on a conçu avec des ordinateurs des notations plus efficaces. On a d'ailleurs, grâce à cela, pu écrire des preuves de résultats assez avancés de mathématiques. Les techniques mises au point à cette occasion servent aussi à prouver la validité de programmes informatiques, et c'est là tout un domaine de recherche actif où la logique vient en aide à l'informatique.

LES INFINIMENT PETITS FORMALISÉS

D'autres progrès logiques ont étonné les mathématiciens. On désespérait de justifier par un formalisme précis les méthodes de calcul qui fonctionnent pourtant bien et qui se fondent sur la manipulation des infiniment petits. L'analyse des XVIII^e et XIX^e siècles avait d'ailleurs débarrassé les mathématiques de ces troubles infinis qui paraissaient indomptables. Le système formel de l'Analyse non standard de A. Robinson, dans les années 1960, a réussi l'exploit de proposer un usage réglé des infiniment petits. Celui qui souhaite

profiter de son intuition de physicien pour calculer dispose maintenant d'un formalisme qui pourra valider ses calculs, jusque-là considérés comme non rigoureux. Les résultats logiques connus concernant l'Analyse non standard sont remarquables, et l'un d'eux indique que toute propriété ne mentionnant pas les infiniment petits démontrés dans le cadre formalisé de l'Analyse non standard peut aussi être démontrée sans utiliser les infiniment petits dans le formalisme ensembliste usuel. Ce résultat justifie *a posteriori* le choix fait historiquement par les mathématiciens de se passer des infiniment petits, mais, le connaissant, il permet aujourd'hui à celui qui trouve commode de les utiliser de laisser libre cours à son goût.

PREUVES HEURISTIQUES ET «PRESQUE PREUVES»

À côté de la notion de preuve formelle qui sert à mettre tout le monde d'accord pour savoir ce qui est vraiment démontré, il existe une multitude de preuves non formelles et résolument non formalisables (du moins avec les systèmes connus aujourd'hui) qui fournissent des presque-certitudes. Ces preuves heuristiques, c'est ainsi qu'on les appelle, sont étranges, car quand on les suit, elles persuadent de la vérité des propositions visées. Pourtant, comme pour les preuves démontrées autrefois par les infiniment petits, les mathématiciens les refusent. Bien qu'elles «fassent voir que c'est vrai», tant qu'on ne disposera pas de bons systèmes formels (analogues à celui de A. Robinson pour l'Analyse non standard), il sera impossible de les transformer en preuves formelles, ce qui signifie tout simplement qu'aux yeux des mathématiciens elles ne démontrent rien !

Un exemple de preuve heuristique difficile à transformer en preuve formelle est indiqué sur la figure 5.

PRESQUE, MAIS PAS VRAIMENT

Un autre exemple de résultat presque prouvé est celui qui concerne les nombres parfaits impairs, résultat qui résiste à une démonstration depuis 20 siècles. Un nombre parfait est un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs différents de lui-même. Le nombre 6 qui est divisible par 1, 2, 3 est un nombre parfait, car $6 = 1 + 2 + 3$. C'est le plus petit nombre parfait, et les trois suivants sont 28, 496, 8128. Existe-t-il des nombres parfaits impairs ? La question est posée depuis plus de deux millénaires. Personne n'en a jamais trouvé, mais personne n'a

démontré qu'il n'en existait pas. Malgré cette absence de démonstration, tout le monde est persuadé aujourd'hui qu'il n'existe pas de nombre parfait impair, car on a démontré (rigoureusement) une grande quantité de propriétés que devrait posséder un tel nombre parfait impair N , s'il en existe.

– Un nombre parfait impair N , s'il en existe, possède au moins 8 facteurs premiers différents et, s'il est multiple de 3, il doit en posséder au moins 11 (P. Hagis, 1983).

– Un nombre parfait impair N , s'il en existe, est tel que la somme des inverses de ses facteurs premiers est située entre 0,596 et 0,694 (D. Suryanarayan, P. Hagis, 1970).

– La plus grande puissance d'un nombre premier qui divise un nombre parfait impair N , s'il en existe, est plus grande que 10^{20} (G. L. Cohen, 1988).

– Un nombre parfait impair N , s'il en existe, est plus grand que 10^{300} (R. Brent, G.L. Cohen, H. te Riele, 1989).

– Un des facteurs premiers d'un nombre parfait impair N , s'il en existe, dépasse 10^6 (P. Hagis, G.L. Cohen, 1998), un autre dépasse 10^4 , et un autre encore dépasse 10^3 (1999, D. Iannucci).

Remarquez que certains résultats ont été démontrés il y a seulement quelques mois. Il semble qu'aucun nombre ne puisse vérifier toutes ces conditions à la fois (mais ce n'est pas rigoureusement établi), et donc on croit plus fortement que jamais qu'il n'existe aucun nombre parfait impair. Ce sentiment et l'idée qu'on est arrivé à quelques millimètres du résultat final ne constituent pas une preuve mathématique formalisable, et donc, comme c'est toujours le cas, aucune controverse n'a cours sur ce point : aussi fort que soit notre sentiment qu'on a qu'il n'existe pas de nombres parfaits impairs, personne ne prétend que c'est prouvé.

Nicolas BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, Paris.

Imre LAKATOS, *Preuves et réfutations*, Éditions Hermann, Paris 1984.

Roger NELSEN, *Proofs Without Words : Exercices in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993, ISBN 0-88385-700-6.

J. DIEUDONNÉ, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1987.

Jean-Michel SALANSKIS, *Le constructivisme non standard*, Presse universitaires du Septentrion, ISBN 2-85939-604-7, 1999. (À propos de l'Analyse non standard).

Simon SINGH, *Le dernier théorème de Fermat*, Éditions J.-C. Lattès, 1998.