



Sculptures réelles et virtuelles

IAN STEWART

Grâce aux mathématiques des surfaces minimales, un artiste crée des sculptures virtuelles et réelles.

Apart les mathématiciens, rares sont ceux qui savent que les mathématiques sont belles. À l'école, ceux qui ont peiné sur les problèmes d'algèbre ou d'arithmétique ont rarement conservé des souvenirs de «beauté». Néanmoins, les mathématiques en ont plusieurs types. Si l'appréciation de l'élégance d'une démonstration mathématique est réservée à une élite, la beauté des formes géométriques est immédiate, tout comme celle des objets que crée la sculpture ; même les non-mathématiciens la perçoivent.

J'ai déjà présenté plusieurs fois des sculptures inspirées par les mathématiques (voir, par exemple, *La sculpture et les nombres*, *Pour la Science*, août 1996). Le courrier qui a suivi cet article m'a révélé la surprenante variété des arts mathématiques. Ici, nous examinerons les relations qu'entretient la mathématique des surfaces minimales avec les sculptures en contreplaqué de Brent Collins, un artiste qui vit à Gower, dans le Missouri. Ce sera l'occasion de poser quelques questions sur les rapports entre art virtuel et art réel.

Dans les années 1980, B. Collins créait des sculptures abstraites, sans aucune intention de leur donner une signification mathématique. Pourtant, il comprit progressivement que, lors de son travail, il cherchait intuitivement à réduire la surface comprise entre les bords de ses sculptures. Sans le savoir, il reproduisait certaines formes élémentaires de la topologie !

En 1995, B. Collins a commencé à travailler avec l'informaticien Carlo Séquin, de l'Université de Berkeley, pour explorer l'aspect mathématique de ses œuvres d'art. Leur collaboration est détaillée dans la revue *Leonardo* (vol. 30, n° 2, 1997), publiée par l'Institut de technologie du Massachusetts.

La forme clef de ces sculptures est la selle, une surface courbée qui ressemble à l'objet qu'utilisent la plupart des

cavaliers. Les selles sont des composants élémentaires des surfaces «minimales», c'est-à-dire les surfaces qui, ayant une courbe donnée pour bord, ont une aire minimale.

On obtient naturellement des surfaces minimales en trempant une boucle de

fil de fer dans de l'eau savonneuse : quelle que soit la forme de la boucle – entrelacs, nœuds, etc. –, le film de savon se tend spontanément et minimise son aire. De surcroît, chacun de ses points est un point selle, c'est-à-dire que, dans des directions perpendiculaires, les courbures sont toujours opposées : l'une est dirigée vers le haut, l'autre vers le bas. Ces points-selles résultent de la minimisation de l'aire qui impose une courbure moyenne nulle en chaque point ; la surface n'est pas plane, mais, autour de chaque point, les courbures opposées de la selle s'annulent.

Les premières œuvres de B. Collins étaient inspirées de selles de cheval, mais il s'est rapidement orienté vers des formes plus complexes, notamment vers ce que les mathématiciens nomment une «selle de singe». Cette surface est comme une selle pour un singe muni d'une queue : elle a trois vallées descendantes, deux pour les jambes et une pour la queue, et trois vallées ascendantes (voir la figure 2). Une courbe fermée autour d'une telle selle s'incurve alternativement trois fois vers le bas et trois fois vers le haut, une selle classique s'incurve alternativement deux fois, et des selles «quadrupèdes» ou d'ordres supérieurs sont également possibles.

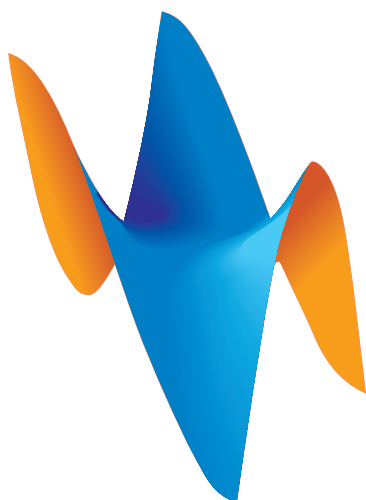
Pour voir comment B. Collins utilise ces idées dans ses œuvres, examinons l'*Hexagone hyperbolique* réalisé en 1995 (voir la figure 1). Cette sculpture, qui inclut six selles disposés en cercle, est étroitement apparentée à une surface minimale nommée tour de Scherk, du nom d'un mathématicien allemand. La tour de Scherk est composée d'une série de selles qui forment des trous orientés alternativement dans deux directions perpendiculaires (voir la figure 3). On obtient un *Hexagone hyperbolique* quand on tord une tour de Scherk à six trous de façon que son sommet et sa base se rejoignent.



1. Le Trèfle hyperbolique (en haut) et l'Hexagone hyperbolique (en bas) de Brent Collins illustrent ce que les mathématiciens nomment surfaces minimales.

Philip Keller

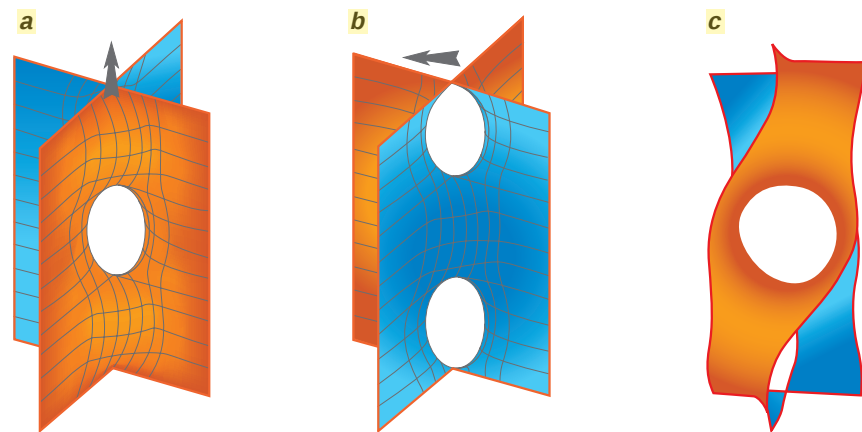
Dessins de Bryan Christie



2. La selle de singe est une surface minimale avec trois directions de courbures vers le bas séparées par trois directions de courbure vers le haut.

Lors de leurs discussions, B. Collins et C. Séquin ont eu l'idée de tourner l'extrémité d'une tour de Scherk de 90 degrés avant de la joindre à l'autre. Cette manipulation rappelle la construction d'un ruban de Möbius, qui s'obtient en tournant de 180 degrés l'extrémité d'une bande de papier avant de la coller à l'autre extrémité. En raison de la torsion, la surface n'a plus qu'une face : si vous peignez en rouge le ruban de Möbius de proche en proche, à partir d'un point quelconque et en vous arrêtant aux bords, vous verrez que le ruban sera finalement tout rouge ! Le ruban de Möbius est une surface à une seule face.

Une tour de Scherk sans torsion, ainsi qu'un *Hexagone hyperbolique*, a deux faces, que l'on peut peindre de deux couleurs différentes. Toutefois, la surface obtenue en tournant l'extrémité d'une tour de Scherk avant de la joindre à la seconde n'a qu'une seule face.



3. Les tours de Scherk sont composées de selles superposées qui délimitent des trous dont les directions alternent. Une tour de Scherk à trois trous est vue de face (a) et après une rotation de 90 degrés (b). Tournée de 90 degrés, l'extrémité de cette tour (c) s'adapte à l'autre extrémité : le «tore» formé quand elles sont jointes est une surface à un seul côté.

Le sommet et la base d'une tour de Scherk sont deux croix identiques, perpendiculaires à l'axe de la tour, qui se recollent parfaitement quand la torsion est un multiple de 90 degrés. Cependant, les trous successifs de la tour sont aussi, alternativement, selon deux directions perpendiculaires : cette alternance ne se retrouve sur la forme finale que si l'on tord les tours à un nombre impair de trous d'un multiple impair de 90 degrés et les tours à un nombre pair de trous d'un multiple pair de 90 degrés. Le *Trèfle hyperbolique* (voir la figure 1) est aussi une structure toroïdale obtenue par torsion d'une tour de Scherk à trois trous de $3 \times 90 = 270$ degrés.

C. Séquin crée ainsi une famille de surfaces qu'il nomme «surfaces de Scherk-Collins». En formulant mathématiquement les idées de B. Collins, il a conçu de nouvelles variations de façon systématique ; la réalisation des œuvres d'art en a été simplifiée. Comme les sculptures sont construites en contreplaqué par un travail long et délicat, B. Collins réalisait d'abord des prototypes en plastique et en cire. Cette méthode fournit un modèle précis, mais elle requiert plusieurs jours de travail. Pour accélérer l'opération, C. Séquin et son collègue Houman Meshkin ont mis au point un programme informatique de représentation des surfaces de Scherk-Collins.

Grâce à ce programme, l'artiste peut étirer et déformer la surface, afin d'obtenir un résultat esthétique satisfaisant. Il lui suffit de préciser certains paramètres : les plus simples sont le nombre de trous dans la tour et l'angle de torsion ; d'autres décrivent, par exemple, la taille des trous. Le programme ne se limite pas à la tour de Scherk ; certains paramètres permettent de choisir entre des selles de cheval ou des selles de singe. Une fois la surface affichée sur l'écran, on la réalise

Réactions

Dans l'article sur les sphéricônes (voir *Pour la Science*, novembre 1999), je décris des solides construits en coupant des doubles cônes et en pivotant l'une des moitiés de 90 degrés. Certains lecteurs ont confirmé ce que je pensais : cette forme n'était pas inédite. En 1996, David Been, d'Arlington, a trouvé dans un parc un objet rebondissant de la forme d'un sphéricône, probablement abandonné par un chien. Celui-ci devait en apprécier les rebonds imprévisibles.

Bob Whitefield, de Chapell Hill, confirme cette utilisation canine et indique que cette forme est brevetée par un fabricant de jouets. De façon plus sérieuse, plusieurs lecteurs ont remarqué que le sphéricône est un cas particulier de l'oloïde, une forme inventée par l'artiste suisse Paul Schatz.

Enfin, dans les années 1980, la compagnie *Momix*, dirigée par le chorégraphe Moses Pendleton, a utilisé pour l'un de ses spectacles une armature métallique très similaire à un sphéricône.

en s'aidant des outils informatiques graphiques. Par cette méthode, C. Séquin a déjà créé des dizaines de modèles de surfaces de Scherk-Collins.

Toutefois, la modélisation informatique pose des problèmes nouveaux : aujourd'hui, les ordinateurs graphiques sont suffisamment puissants pour que la sculpture virtuelle ne se distingue plus de l'objet réel. Par exemple, les programmes graphiques donnent aux images de surface de Scherk-Collins n'importe quelle texture, tels du bois et ses fibres, du cuivre brillant, de la peau de lézard ou du tissu. Les images imprimées des sculptures virtuelles sont indiscernables de photographies des sculptures réelles. Mieux même, un casque de réalité virtuelle permet de «tourner autour» des sculptures et d'en avoir une impression tridimensionnelle.

Doit-on alors matérialiser les sculptures ? Les sculptures virtuelles ne suffisent-elles pas ? La plupart des artistes traditionnels répondraient sans doute par la négative, mais qu'en diront les générations futures, familiarisées depuis leur naissance avec les systèmes de réalité virtuelle ? B. Collins est catégorique : «En tant qu'espèce ayant évolué pour la fabrication et l'usage des outils, les êtres humains ont une préférence esthétique pour les objets d'art faits à la main, et ils auront toujours besoin d'eux en tant que révélateurs de notre nature.» En d'autres termes, le réel est imbattable !

		JOUEUR A	
JOUEUR B	B coopère et gagne	3	B coopère et gagne 0
	A coopère et gagne	3	A trahit et gagne 8
	B trahit et gagne	8	B trahit et gagne 1
	A coopère et gagne	0	A trahit et gagne 1

Le dilemme du renvoi d'ascenseur

JEAN-PAUL DELAHAYE • PHILIPPE MATHIEU

Doit-on se sacrifier à tour de rôle dans de nombreuses confrontations comme les ventes aux enchères ou les élections ?

Situation ambiguë : je suis face à un inconnu au rez-de-chaussée de cette grande tour, devant ce petit ascenseur à une seule place dont la porte est ouverte. Il n'y a pas de bouton pour le rappel lorsqu'il sera monté, et je n'ai pas du tout, mais alors pas du tout, envie de gravir les huit étages à pied. L'inconnu me dit : « Laissez-moi passer en premier, car, arrivé en haut, je vous renverrai l'ascenseur. »

Dois-je accepter ? Pourquoi devrais-je le croire et accepter qu'il passe devant moi ? D'ailleurs tiendra-t-il sa promesse si je le laisse passer ? C'est le dilemme du renvoi d'ascenseur.

Le problème est-il d'essence uniquement psychologique ? Non, car il peut être aussi mathématisé ! L'étonnant est que son étude mathématique, lorsque nous imaginons que nous devons y jouer à de multiples reprises avec toutes sortes de gens, fasse ressortir de multiples aspects inattendus. Cette variante du dilemme itéré du prisonnier (voir une synthèse à propos de ce dilemme dans le dossier *Pour la science* sur Les mathé-

matiques sociales) possède des propriétés remarquables : la plus étonnante est que certaines stratégies optimales font intervenir un choix au hasard !

Nous verrons aussi que, même dans le cas le plus simple, quand nous voulons jouer contre quelqu'un qui adopte le même comportement que nous, nous sommes conduits à des calculs subtils : les mathématiques sociales ne se réduisent pas toutes à des statistiques et à des règles de trois...

DILEMMES DU PRISONNIER ET DE L'ASCENSEUR

Fixons d'abord les règles du jeu abstrait que nous tirons de ce problème de l'ascenseur. À chaque rencontre, chacun des deux participants, désignés par A et B, doit faire un choix : soit il coopère, ce que nous désignons par c (comme *coopérer*), soit il trahit, ce que nous désignons par t (comme *trahir*). Ce double choix est dénommé une *rencontre*. Il y a ainsi quatre rencontres possibles, que nous notons $[c,c]$, $[c,t]$, $[t,c]$ et $[t,t]$, la première

lettre désignant le choix de A, la seconde celle de B. Une *partie* est constituée d'une succession de rencontres. Les choix faits à chaque rencontre le sont simultanément, et la seule information dont dispose un joueur pour décider de ce qu'il joue à la rencontre numéro n est celle du passé des rencontres (par exemple, après trois rencontres $[c,c]$ $[t,t]$ $[t,c]$). Le nombre de rencontres d'une partie n'est pas fixé à l'avance, mais on supposera qu'il y en a plusieurs (cinq au moins).

● Lorsque l'un des joueurs trahit (t) et que l'autre coopère (c), correspondant à une rencontre $[t,c]$, A, qui a trahi, gagne 8 points et B, qui a coopéré, n'en gagne aucun (ce que l'on désigne par $g(tc) = 8$, $g(ct) = 0$, g étant l'initiale de gain) ; dans notre exemple imagé, l'une des deux personnes est montée dans l'ascenseur en prenant l'autre par surprise. Les huit points gagnés correspondent à la satisfaction du personnage qui, après avoir trahi les règles du savoir-vivre, se fait tracer sans effort jusqu'en haut. Celui qui reste en bas alors qu'il voulait coopérer n'a aucun point, car, non seulement il reste



1a. Rencontre $[t,c]$. 8 points pour celui qui monte, 0 pour celui qui reste en bas : le crime paie.

1b. Rencontre $[t,t]$. 1 point pour chacun des deux vindicatifs : la dispute ne paie pas.

1c. Rencontre $[c,c]$: 3 points pour chacun des deux compères : frustrés, mais amicaux.