

|          |                         |                         |                         |
|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| JOUEUR A |                         |                         |                         |
| JOUEUR B | B coopère et gagne<br>3 | B coopère et gagne<br>0 | A coopère et gagne<br>3 |
|          | B trahit et gagne<br>8  | B trahit et gagne<br>1  | A trahit et gagne<br>8  |
|          | A coopère et gagne<br>0 | A trahit et gagne<br>1  |                         |

# Le dilemme du renvoi d'ascenseur

JEAN-PAUL DELAHAYE • PHILIPPE MATHIEU

*Doit-on se sacrifier à tour de rôle dans de nombreuses confrontations comme les ventes aux enchères ou les élections ?*

**S**ituation ambiguë : je suis face à un inconnu au rez-de-chaussée de cette grande tour, devant ce petit ascenseur à une seule place dont la porte est ouverte. Il n'y a pas de bouton pour le rappel lorsqu'il sera monté, et je n'ai pas du tout, mais alors pas du tout, envie de gravir les huit étages à pied. L'inconnu me dit : « Laissez-moi passer en premier, car, arrivé en haut, je vous renverrai l'ascenseur. »

Dois-je accepter ? Pourquoi devrais-je le croire et accepter qu'il passe devant moi ? D'ailleurs tiendra-t-il sa promesse si je le laisse passer ? C'est le dilemme du renvoi d'ascenseur.

Le problème est-il d'essence uniquement psychologique ? Non, car il peut être aussi mathématisé ! L'étonnant est que son étude mathématique, lorsque nous imaginons que nous devons y jouer à de multiples reprises avec toutes sortes de gens, fasse ressortir de multiples aspects inattendus. Cette variante du dilemme itéré du prisonnier (voir une synthèse à propos de ce dilemme dans le dossier *Pour la science* sur Les mathé-

matiques sociales) possède des propriétés remarquables : la plus étonnante est que certaines stratégies optimales font intervenir un choix au hasard !

Nous verrons aussi que, même dans le cas le plus simple, quand nous voulons jouer contre quelqu'un qui adopte le même comportement que nous, nous sommes conduits à des calculs subtils : les mathématiques sociales ne se réduisent pas toutes à des statistiques et à des règles de trois...

## DILEMMES DU PRISONNIER ET DE L'ASCENSEUR

Fixons d'abord les règles du jeu abstrait que nous tirons de ce problème de l'ascenseur. À chaque rencontre, chacun des deux participants, désignés par A et B, doit faire un choix : soit il coopère, ce que nous désignons par c (comme *coopérer*), soit il trahit, ce que nous désignons par t (comme *trahir*). Ce double choix est dénommé une *rencontre*. Il y a ainsi quatre rencontres possibles, que nous notons  $[c,c]$ ,  $[c,t]$ ,  $[t,c]$  et  $[t,t]$ , la première

lettre désignant le choix de A, la seconde celle de B. Une *partie* est constituée d'une succession de rencontres. Les choix faits à chaque rencontre le sont simultanément, et la seule information dont dispose un joueur pour décider de ce qu'il joue à la rencontre numéro  $n$  est celle du passé des rencontres (par exemple, après trois rencontres  $[c,c]$   $[t,t]$   $[t,c]$ ). Le nombre de rencontres d'une partie n'est pas fixé à l'avance, mais on supposera qu'il y en a plusieurs (cinq au moins).

● Lorsque l'un des joueurs trahit (t) et que l'autre coopère (c), correspondant à une rencontre  $[t,c]$ , A, qui a trahi, gagne 8 points et B, qui a coopéré, n'en gagne aucun (ce que l'on désigne par  $g(tc) = 8$ ,  $g(ct) = 0$ , g étant l'initiale de gain) ; dans notre exemple imagé, l'une des deux personnes est montée dans l'ascenseur en prenant l'autre par surprise. Les huit points gagnés correspondent à la satisfaction du personnage qui, après avoir trahi les règles du savoir-vivre, se fait tracer sans effort jusqu'en haut. Celui qui reste en bas alors qu'il voulait coopérer n'a aucun point, car, non seulement il reste



1a. Rencontre  $[t,c]$ . 8 points pour celui qui monte, 0 pour celui qui reste en bas : le crime paie.

1b. Rencontre  $[t,t]$ . 1 point pour chacun des deux vindicatifs : la dispute ne paie pas.

1c. Rencontre  $[c,c]$  : 3 points pour chacun des deux compères : frustrés, mais amicaux.

sur place, mais il a dû accepter la vexation de s'être fait surprendre par l'autre.

- Lorsque les deux joueurs trahissent (rencontre  $[t, t]$ ), chacun gagne un point ( $g(t) = 1$ ). Dans ce type de rencontre, les deux joueurs se battent pour monter dans l'ascenseur, aucun ne voulant céder, et, après avoir perdu du temps et avoir échangé des coups, ils renoncent et montent à pied.

- Lorsque les deux joueurs coopèrent (rencontre  $[c, c]$ ), chacun gagne 3 points ( $g(c) = 3$ ). C'est le cas où, sans se disputer, ils comprennent rapidement qu'aucun ne cédera et donc renoncent.

Les valeurs des coefficients pourraient être différentes, l'important, pour qu'il y ait dilemme de l'ascenseur, est que :  $g(tc) > g(cc) > g(tt) > g(ct)$ , ce qui est naturel, et aussi que  $\{g(tc) + g(ct)\} / 2 > g(cc)$ , ce qui est le cas ici avec :  $g(tc) = 8$ ,  $g(cc) = 3$ ,  $g(tt) = 1$ ,  $g(ct) = 0$ .

Si l'immeuble, au lieu d'avoir 8 étages, en avait 20, des coefficients mieux choisis seraient sans doute :  $g(tc) = 20$ ,  $g(cc) = 3$ ,  $g(tt) = 1$ ,  $g(ct) = 0$ . Si la dispute dans le cas d'une partie  $[t, t]$  était rapide et peu violente, on choisirait peut-être  $g(tc) = 8$ ,  $g(cc) = 2$ ,  $g(tt) = 1$ ,  $g(ct) = 0$ .

Le problème classique dénommé *Dilemme du prisonnier* est très proche et correspond au choix  $g(tc) = 5$ ,  $g(cc) = 3$ ,  $g(tt) = 1$ ,  $g(ct) = 0$  (le gain qu'on tire en trahissant quelqu'un qui souhaite coopérer est moins important). La première série d'inégalités  $g(tc) > g(cc) > g(tt) > g(ct)$  est vérifiée, mais pas la seconde, qui y est inversée :  $\{g(tc) + g(ct)\} / 2 < g(cc)$ .

Il s'agit, dans les deux cas, d'un dilemme, car l'intérêt individuel de chacun est d'obtenir  $g(tc)$  (c'est le plus grand des coefficients). Toutefois, si chaque joueur se laisse tenter et trahit, la rencontre  $[t, t]$  ne rapporte qu'un seul point à chaque joueur, ce qui collectivement est le pire des choix.

Cette inversion d'une inégalité entre le dilemme du prisonnier et celui de l'ascenseur change beaucoup le problème. L'inégalité  $\{g(tc) + g(ct)\} / 2 > g(cc)$  signifie que, dans une série de parties successives, les deux joueurs ont intérêt à jouer alternativement  $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$ , etc., car cela leur rapporte en moyenne  $\{g(tc) + g(ct)\} / 2$  alors que, s'ils jouent  $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$ ..., ils ne gagneront en moyenne que  $g(cc)$  points par rencontre. Avec ce choix alternatif de coefficients, les joueurs gagnent 4 points en moyenne avec des séries  $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$ ... et 3 en moyenne avec des séries  $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$ ...

L'avantage de la première méthode est encore accru dans le cas d'un immeuble à 20 étages. À l'inverse, dans le cas du dilemme du prisonnier, il est opti-

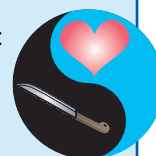
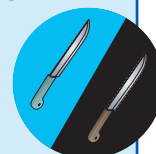
## 2. DISPUTE, HASARD, COOPÉRATION SIMPLE, MÉTACOOPÉRATION

(i) Une partie où chaque joueur tente de gagner les huit points que rapporte une rencontre  $[t, c]$  conduit chacun à de mauvais résultats. Dans une partie composée de dix rencontres :  $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$   $[t, t]$ , le nombre de points gagnés par le premier est  $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10$ , et le nombre de points gagnés par le second est  $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10$ .

(ii) Une partie où chaque joueur «coopère» sagement avec l'autre est déjà plus rémunératrice :  $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$ . Le nombre de points gagnés par le premier est  $3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 30$ , et le nombre de points gagnés par le second est  $3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 30$ .

(iii) Une partie où chaque joueur joue au hasard donne, par exemple,  $[c, c]$   $[c, t]$   $[t, t]$   $[t, c]$   $[t, t]$   $[c, c]$   $[t, c]$   $[t, t]$   $[c, c]$   $[t, t]$ . Le nombre de points gagnés par le premier est  $3+0+1+8+1+3+8+1+3+1 = 29$ , et le nombre de points gagnés par le second,  $3+8+1+0+1+3+0+1+3+1 = 21$ .

(iv) Une partie où les joueurs jouent «en opposition de phase» correspond à une entente de niveau supérieure, la métacoopération :  $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$ . Le nombre de points gagnés par le premier est  $0+8+0+8+0+8+0+8+0+8 = 40$ , et le nombre de points gagnés par le second est égal à  $8+0+8+0+8+0+8+0+8+0 = 40$ .



mal de jouer  $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$ ... : la coopération mutuelle est encouragée par les valeurs des coefficients.

### LA MÉTACOOPÉRATION

Dans une longue série de rencontres au dilemme de l'ascenseur, pour gagner beaucoup de points (ce qui, bien sûr, est le but), il faut réussir à organiser une alternance qui peut être à deux temps  $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$ ... ou plus complexe  $[c, t]$   $[c, t]$   $[t, c]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[c, t]$   $[t, c]$   $[t, c]$ ... ou plus compliquée encore. Ce type d'alternances n'est pas optimale dans le dilemme du prisonnier, mais favorable dans le dilemme de l'ascenseur : c'est une sorte de coopération de niveau supérieur, que nous nommerons *métacoopération*. Pour gagner des points au jeu du dilemme de l'ascenseur comme au dilemme du prisonnier, il faut absolument éviter les rencontres  $[t, t]$ . On peut tenter de se mettre d'accord avec son partenaire pour jouer  $[c, c]$   $[c, c]$   $[c, c]$ ..., c'est la coopération simple qui est idéale au dilemme du prisonnier et assez bonne au dilemme de l'ascenseur. Toutefois le plus rentable au dilemme de l'ascenseur est de mettre en place la métacoopération  $[c, t]$   $[t, c]$   $[c, t]$   $[t, c]$ ... La coopération est vraiment délicate, car il faut que l'un des joueurs accepte de perdre au premier coup, en espérant que son partenaire lui «renverra l'ascenseur».

Ce dilemme est-il fréquent dans la vie courante ? Sans doute bien plus qu'on ne le croit, et nous pensons que c'est faute

d'avoir su précisément le distinguer du dilemme du prisonnier qu'on a été parfois déçu de ne pas retrouver, dans le monde réel, ce qu'on modélisait par des simulations informatiques.

Voici une liste de situations dont la modélisation semble plus satisfaisante par le dilemme du renvoi d'ascenseur que par le dilemme du prisonnier.

### Élections avec deux candidats d'un même camp

Deux candidats du parti d'extrême-centre veulent se présenter à la prochaine élection présidentielle. Bien sûr, il y a aussi des candidats d'autres partis. Les divers cas sont :

- $[c, c]$ . Les deux candidats se présentent, mais restent corrects, c'est-à-dire ne cherchent pas à se discréditer mutuellement, ne publient pas de tracts injurieux, etc. On évalue alors que chacun a 30 pour cent de chances d'être élu. Les voix correspondant à l'électorat de leur formation se répartissent équitablement sur les deux candidats.

- $[t, t]$ . Les deux candidats se présentent, mais entrent en compétition agressive, ce qui nuit à chacun. Leur campagne fait fuir des électeurs de leur camp, et finalement tous deux sont également pénalisés par cette confrontation publique. On évalue que chacun ne dispose plus que de 10 pour cent de chances d'être élu.

- $[t, c]$ . Seul le premier candidat est agressif, alors que l'autre ne l'est pas