

PARTIES OPTIMALES

Le défaut le plus ennuyeux de *Donnant-donnant* est de mal jouer contre elle-même, et c'est réellement un défaut grave. Cela transparaît nettement lorsqu'on utilise, pour comparer les stratégies, ce que l'on appelle les compétitions écologiques : ce sont des compétitions où les stratégies que l'on veut évaluer sont mises dans une arène artificielle ; ensuite, en fonction de leur réussite lors des rencontres qu'elles font deux à deux, leurs effectifs augmentent ou diminuent. Au bout de quelques générations, les mauvaises stratégies ont disparu, et les bonnes occupent tout le terrain. Bien réussir lors d'une telle compétition écologique, c'est envahir l'arène, ce qui signifie qu'on rencontrera souvent des stratégies sœurs (jouant selon les mêmes règles). Bien réussir nécessite donc de bien jouer face à soi-même, et cela *Donnant-donnant* ne sait pas le faire.

Les simulations informatiques (voir les figures 3 et 4) confirment cette faiblesse de *Donnant-donnant* et, mieux encore, un résultat mathématique prouve que *Donnant-donnant* n'est pas bonne et ne peut pas l'être. Pour l'énoncer, nous introduirons certaines notions utiles à la bonne compréhension des dilemmes.

Dénommons *partie optimale* une partie infinie opposant deux stratégies et telle que la limite de la somme des gains moyens ne puisse pas être améliorée. Une partie $[c,c] [c,c] [c,c] [c,c] \dots$ n'est pas optimale, car la limite de la somme des gains moyens est 6. En revanche, une partie $[c,t] [c,t] [c,t] [c,t] \dots$ est optimale, car la limite de la somme des gains moyens est 8. La partie infinie $[c,t] [c,t] [c,t] [c,t] \dots$ n'est toutefois pas équitable, car c'est toujours le premier joueur qui se sacrifie pour que le second marque des points (ce type de parties est le jeu que pratiquent les espèces, où une hiérarchie s'installe entre individus). On introduit donc la notion de *partie optimale équitable* en imposant que le score obtenu soit partagé à parts égales entre les deux joueurs. Les parties selon le schéma de métacoopération $[c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] \dots$ sont optimales équitables. Au dilemme de l'ascenseur, il existe toutes sortes de parties optimales équitables : toutes celles obtenues en répétant périodiquement un schéma quelconque composé du même nombre de $[c,t]$ que de $[t,c]$, et nous en avons déjà cité plusieurs.

Maintenant voici la définition qui va nous intéresser : on dénomme *stratégie rationnelle* une stratégie qui, lorsqu'elle joue contre elle-même, joue toujours des parties optimales. De même, bien sûr, on dénomme *stratégie rationnelle équitable* une stratégie qui, lorsqu'elle joue contre

elle-même, joue toujours des parties optimales équitables. La question est : existe-t-il des stratégies rationnelles et des stratégies rationnelles équitables ?

Au dilemme du prisonnier, toute stratégie qui ne prend jamais l'initiative de trahir (t), et donc en particulier *Donnant-donnant*, est rationnelle équitable (car contre elle-même elle joue la partie optimale équitable $[c,c] [c,c] \dots$). Au dilemme du prisonnier, toute stratégie rationnelle est d'ailleurs automatiquement équitable.

LE HASARD EST INDISPENSABLE

Le dilemme du renvoi d'ascenseur est plus intéressant, car *Donnant-donnant* n'y est plus rationnelle. Ce résultat remarquable prouve la complexité intrinsèque du dilemme de l'ascenseur : pour qu'une stratégie soit rationnelle, il faut qu'elle soit non déterministe (c'est-à-dire qu'elle fasse intervenir le hasard dans ses méthodes de choix de coups).

La démonstration exploite l'idée qu'une stratégie déterministe, quand elle joue contre elle-même, ne joue que des coups $[c,c]$ ou $[t,t]$, lesquels, au dilemme de l'ascenseur, sont moins bons que les coups $[c,t]$ et $[t,c]$. Examinons des exemples de stratégies rationnelles au dilemme de l'ascenseur.

Raison-naïve-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type $[c,t]$ ou $[t,c]$, je choisis au hasard c ou t , avec 50 pour cent de chances pour chacun ; ensuite, je joue toujours la même chose. La stratégie *Raison-naïve-50* contre elle-même jouera, par exemple, la partie : $[c,c] [t,t] [t,t] [c,c] [c,t] [c,t] [c,t] [c,t] \dots$

Après une période de recherche de déphasage (qui s'étend sur quatre échanges), les comportements ont été définitivement fixés (ce qui est évidemment désavantageux pour la première, qui se fait exploiter de façon éhontée par la seconde). Quand une *Raison-naïve-50* en rencontre une autre, celle qui perd en premier perd jusqu'à la fin. Si tous les individus d'une espèce animale adoptent une telle stratégie, alors, automatiquement, se mettra en place une hiérarchie stable, ce qui est collectivement intéressant et meilleur même que la coopération simple... même si c'est très injuste.

Raison-naïve-50 est rationnelle, mais n'est pas équitable. Existe-t-il des stratégies à la fois raisonnables et équitables ? Oui, en voici l'exemple le plus simple, que vous avez sans doute deviné.

Raison-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type $[c,t]$ ou $[t,c]$, je choisis à pile ou face c ou t ; ensuite, je joue toujours l'inverse de mon coup précédent. *Raison-50* contre elle-même

jouera des parties du type : $[c,c] [t,t] [t,t] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] \dots$

Après une période de recherche de déphasage (qui dure ici trois échanges), les comportements sont fixés, mais sans qu'aucun des deux joueurs soit privilégié, car les deux stratégies *Raison-50* alternent leur choix en opposition de phase menant une parfaite métacoopération.

De telles stratégies jouent bien contre elles-mêmes, mais ne jouent pas nécessairement bien contre d'autres qui peuvent exploiter leur comportement trop simple et prévisible. Voici un exemple de stratégie qui mêle l'idée de *Donnant-donnant* et l'idée de la recherche d'un déphasage.

Donnant-donnant-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type $[c,t]$ ou $[t,c]$, je choisis à pile ou face (50 pour cent) c ou t ; ensuite j'applique *Donnant-donnant*.

À la place de 50 pour cent, on peut bien sûr utiliser n'importe quelle autre probabilité. C'est ce que nous appellerons les stratégies *Donnant-donnant-X* (où X est la probabilité de jouer c dans la période de recherche de déphasage). La longueur moyenne de la recherche du déphasage est bien sûr la plus courte pour X égal à 50, mais, en choisissant cette valeur, on joue souvent des rencontres $[t,t]$ qui sont coûteuses. Le calcul montre qu'il vaut mieux allonger la période de recherche d'un déphasage pour qu'il soit moins coûteux. Le coût moyen d'une recherche de déphasage est minimum pour la probabilité X égal à 56,69640 pour cent, nombre qu'on obtient en étudiant la fonction «coût du déphasage» et en recherchant la valeur pour laquelle cette fonction atteint son minimum.

Au jeu du dilemme du renvoi d'ascenseur, non seulement pour marquer des points il faut être non déterministe, mais de plus il faut savoir résoudre des problèmes de minimisation. Décidément, prendre l'ascenseur est devenu bien compliqué !

J.-P. DELAHAYE, P. MATHIEU et B. BEAUFILS, *The Iterated Lift Dilemma*, in *Computational Conflicts* (R. Dieng et J. Müller ed.), Springer-Verlag, Berlin, 2000.

M. NOWAK et K. SIGMUND, *Phage-lift for Game Theory*, in *Nature*, pp. 367-368, avril 1999.

P. TURNER et L. CHAO, *Prisonner's Dilemma in RNA virus*, in *Nature*, pp. 441-443, avril 1999.

Sur le dilemme itéré du prisonnier et la théorie des jeux, on consultera le dossier *Pour la Science : Les mathématiques sociales*, juillet 1999.

On trouvera à l'URL www.lifl.fr/IPD/ des logiciels et des articles sur les problèmes de dilemme.



Bruno Vacaro

Une affaire de dimensions

ROLAND LEHOUCQ

Existe-t-il des principes physiques permettant de déduire les dimensions de notre monde ?

Dans son *De Caelo* («Du ciel»), Aristote discute le nombre de dimensions de l'espace et propose un argument inspiré des pythagoriciens : ces derniers voyaient dans le nombre trois, le nombre du Tout, car il représentait le commencement, le milieu et la fin. Dans le *Dialogue sur les deux grands systèmes du Monde*, publié en 1632, Galilée apporte un argument géométrique affirmant qu'il n'y a pas plus de trois dimensions, car par un point ne peuvent concourir plus de trois droites perpendiculaires deux à deux.

La ligne de pensée que je vais suivre est inspirée du philosophe Emmanuel Kant pour lequel la tridimensionnalité de l'espace résultait de la loi de gravitation universelle d'Isaac Newton selon laquelle les corps s'attirent en raison inverse du carré de leur distance. Avec Kant, pour la première fois, le problème de la tridimensionnalité de l'espace est envisagé non pas du point de vue métaphysique ou géométrique, mais par une considération physique qui interprète la forme d'une loi d'interaction.

La proposition de Kant peut être généralisée pour un espace à plus de trois dimensions. Dans un espace à N dimensions, la gravitation est une loi qui varie comme la distance à la puissance un moins la dimension de l'espace (loi en r^{1-N}). Ainsi, la loi de gravitation de Newton est une conséquence directe de la tridimensionnalité de notre espace. Dans un espace à quatre dimensions, la force de gravitation serait proportionnelle au cube de la distance.

En 1917, le physicien allemand Paul Ehrenfest publie un article fondamental dans lequel il s'intéresse aux effets sur le mouvement des masses d'une loi d'interaction dans un espace à plusieurs dimensions. Il montre que le problème de deux corps en interaction gravitationnelle généralisée à N dimensions ne possède de solutions stables et bornées à la seule condition que la dimension de l'espace soit égale à deux ou trois. De surcroît, si l'on veut exprimer que l'interaction est évanescence à l'infini et que l'on impose une énergie potentielle d'interaction nulle lorsque la

distance entre les corps tend vers l'infini, seul le cas tridimensionnel donne des orbites stables.

L'absence de solutions stables dans un espace à quatre dimensions peut être représentée sur une feuille de papier : c'est une projection bidimensionnelle, mais les quantités physiques, comme les distances, résultent des calculs faits en dimension quatre. Un ensemble de particules tombent sur une masse ponctuelle. Ces particules ont toutes la même masse et la même vitesse initiale, mais leur position initiale diffère. Celles qui sont situées hors de la région ombrée s'échappent à l'infini, tandis que les autres tombent en spirale sur le corps central (voir la figure 1a). Cette situation est nettement différente du cas d'un espace à trois dimensions où nous aurions des orbites ouvertes allant à l'infini (parabole et hyperbole) ou des orbites elliptiques fermées et stables (voir la figure 1b). Si l'on considère que le développement de la vie a nécessité des millions d'années, il est heureux que notre monde ait trois dimensions.

La dimensionnalité de l'espace touche aussi le monde des atomes. Dans l'espace à trois dimensions, la force entre deux charges est en fonction inverse du carré de la distance entre les charges. La matière qui nous entoure est indubitablement

1a. Dans un monde à quatre dimensions, la force de gravité est telle que les objets qui s'approchent à différentes distances d'un astre ont deux options : s'écraser dessus (ceux qui partent de la zone ombrée) ou s'échapper à l'infini. Dans ce monde, les orbites stables n'existent pas. **1b.** Dans notre monde tridimensionnel, les objets qui s'approchent d'un astre peuvent chuter dessus, mais il peuvent aussi s'échapper à l'infini ou rester en orbite autour de l'astre.

