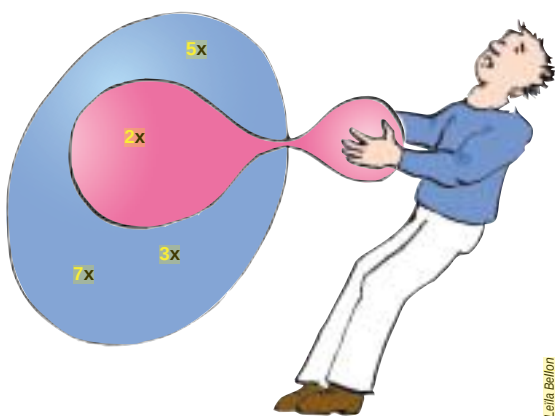


Voir bon de commande page 98

Ainsi, plus de 150 ans après les premières observations des minces couches de liquide à la surface de la glace par Faraday, nous commençons tout juste à clarifier les mécanismes physiques responsables du caractère glissant de la glace, de ses propriétés d'adhérence et de son énorme pouvoir de destruction. Beaucoup de questions restent ouvertes, mais nous savons qu'une meilleure connaissance de la microphysique de la glace nous permettra de mieux comprendre ses effets sur l'environnement. Le soulèvement du sol par le gel et l'électrification des nuages ne sont que deux des phénomènes qui semblent dus à la couche liquide qui entoure la glace.

Ice Physics and the Natural Environment, sous la direction de J.S. Wettlaufer, J.G. Dash et N. Untersteiner, NATO ASI Series I : Global Environmental Change, vol. 56, Springer-Verlag, 1999.



Leila Bellon

La stratégie des sous-ensembles

IAN STEWART

Qui trouvera la stratégie gagnante d'un nouveau jeu, qui combine la théorie des ensembles et la topologie ?

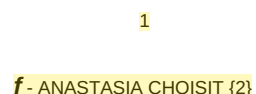
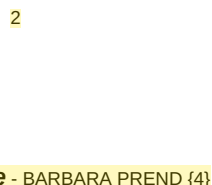
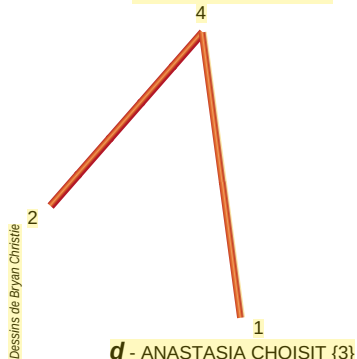
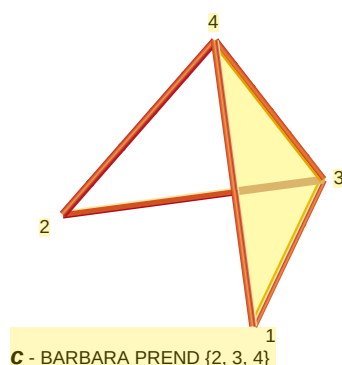
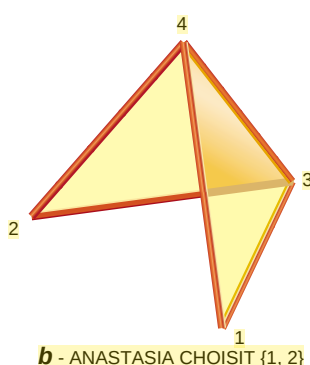
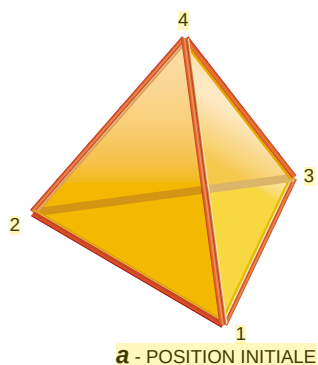
Les Babyloniens expliquaient déjà les notions mathématiques grâce à des jeux et à des énigmes : les archéologues ont retrouvé des problèmes d'arithmétique gravés sur des tablettes d'argile. Depuis, les mathématiques ont progressé, mais elles engendrent toujours des jeux. À l'Université de Berkeley, David Gale en a inventé un qu'il a décrit dans son livre *Games of no chance* (Cambridge University Press) et qui allie la théorie des ensembles et la topologie. Ce jeu devrait intéresser tous les amateurs de jeux mathématiques, car personne n'a encore découvert de stratégie gagnante.

Ce jeu considère des ensembles, c'est-à-dire des collections d'objets, nommés éléments. Lorsqu'un ensemble a un nombre fini d'éléments, on peut définir

l'ensemble «en extension», par une liste. Par exemple, $\{2, 3, 5, 7\}$ est l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10. Un ensemble X est un sous-ensemble d'un ensemble Y quand tous les éléments de X appartiennent à Y : l'ensemble $\{3, 5, 7\}$ des nombres premiers impairs inférieurs à 10 est un sous-ensemble de l'ensemble $\{2, 3, 5, 7\}$. Chaque ensemble est un sous-ensemble de lui-même, et un sous-ensemble de Y est strict lorsqu'il est différent de Y . Un sous-ensemble peut ne contenir qu'un seul élément : $\{2\}$ est l'ensemble des nombres premiers pairs. Le sous-ensemble complémentaire de X dans Y est composé des éléments de Y qui n'appartiennent pas à X : $\{2\}$ est le complémentaire de $\{3, 5, 7\}$ dans l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10.

Enfin, un sous-ensemble peut n'avoir aucun élément, c'est l'ensemble vide.

Le jeu de D. Gale est nommé «un sous-ensemble à emporter». Il se joue à partir d'un ensemble fini S , par exemple l'ensemble des entiers de 1 à n $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. À chaque tour, un joueur enlève de S un sous-ensemble strict non vide, tel qu'il ne contienne aucun sous-ensemble déjà prélevé pendant la partie. Le premier qui ne peut plus jouer a perdu. Un moyen pratique de jouer consiste à composer un tableau à n colonnes, une par élément de S . Sur une ligne, on marque une croix dans les colonnes correspondant aux éléments du sous-ensemble pris par un joueur. Ainsi, une ligne de croix représente le choix d'un joueur.



1. Le jeu du «un sous-ensemble à emporter» peut être représenté géométriquement. Pour $n = 4$, la position initiale est un tétraèdre (a). Les deux joueuses, Anastasia et Barbara, choisissent alternative-

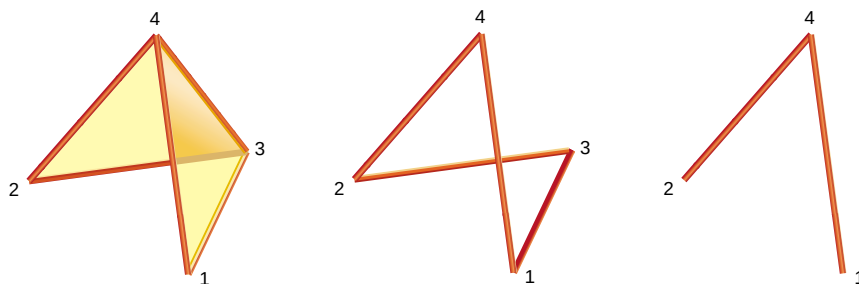
ment un sous-ensemble dont les composants correspondants du tétraèdre (sommets, arêtes et faces) sont éliminés. Le joueur, ici Barbara, qui enlève le dernier élément gagne.

Avec ces règles, examinons quelques parties entre deux joueuses, Anastasia et Barbara. Anastasia joue toujours en premier. Quand $n = 1$, l'ensemble S n'a aucun sous-ensemble strict. Lorsque $n = 2$, $S = \{1, 2\}$, Anastasia ne peut que jouer $\{1\}$ ou $\{2\}$: quoi qu'elle choisisse, Barbara prend le second sous-ensemble et gagne, puisque Anastasia ne peut alors plus rien retirer.

Pour $n = 3$ et $S = \{1, 2, 3\}$, Anastasia peut choisir le sous-ensemble à deux éléments $\{1, 2\}$. Barbara prend alors le sous-ensemble complémentaire $\{3\}$. Comme Anastasia ne peut plus choisir de sous-ensemble contenant $\{3\}$, elle doit prendre un sous-ensemble de $\{1, 2\}$: le jeu est identique à celui où $S = \{1, 2\}$, et Barbara gagne encore. Le déroulement du jeu est semblable quel que soit le sous-ensemble de deux éléments pris au départ. Anastasia, qui se lasse de perdre, décide alors de commencer avec un sous-ensemble à un élément, par exemple $\{3\}$. Cependant, Barbara prend alors le complémentaire $\{1, 2\}$ et elle gagne encore. Au total, puisque Anastasia ne peut commencer qu'avec un sous-ensemble à un ou deux éléments, Barbara a une stratégie gagnante qui consiste à prendre systématiquement le complémentaire du sous-ensemble d'Anastasia. Quand n est supérieur à trois, Barbara a-t-elle encore une stratégie gagnante ?

Pour le savoir, examinons des problèmes de topologie, cette «géométrie des surfaces déformables». En topologie, on s'intéresse à des objets que l'on peut se représenter comme du caoutchouc qui pourrait se traverser, mais pas se déchirer. La représentation géométrique du «un sous-ensemble à emporter» impose une triangulation d'une surface, c'est-à-dire son fractionnement en triangles joints par leurs côtés. Cette méthode a été initialement mise au point pour des surfaces (à deux dimensions, donc), mais elle est généralisable à des objets de dimensions supérieures ; les triangles sont alors remplacés par des formes élémentaires nommées simplexes. Par exemple, un simplexe à trois dimensions, ou 3-simplexe, est un tétraèdre (voir la figure 1). Un tétraèdre a quatre sommets, quatre faces et six arêtes. Les faces sont des triangles (des 2-simplexes), les arêtes sont des segments (des 1-simplexes) et les sommets, des points (des 0-simplexes).

Ces composants du tétraèdre correspondent exactement aux sous-ensembles de $\{1, 2, 3, 4\}$: le tétraèdre est l'ensemble entier ; les faces sont les sous-ensembles de trois éléments $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$; les arêtes sont les sous-ensembles à



a - ANASTASIA CHOISIT $\{1, 2\}$

b - BARBARA PREND $\{3, 4\}$

c - ANASTASIA CHOISIT $\{3\}$

2. La stratégie du complémentaire échoue dans cette partie de «ôte simplexe», car Barbara ne peut prendre le complémentaire du sous-ensemble choisi par Anastasia au deuxième tour (c).

deux éléments $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$; enfin, les sommets sont les sous-ensembles à un élément $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$.

N'importe quel $(n-1)$ -simplexe représente un ensemble $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, et chaque simplexe de dimension inférieure à $n-1$ est un sous-ensemble strict de l'ensemble S . Le «un sous-ensemble à emporter» devient alors un nouveau jeu, le «ôte simplexe» : à partir d'un simplexe donné, chaque joueur choisit un sous-simplexe strict de n'importe quelle dimension et en élimine l'intérieur, ainsi que tous les intérieurs des sous-simplexes qui le contiennent, sans toutefois supprimer les frontières du sous-simplexe choisi, par exemple les côtés d'une face triangulaire ou les deux extrémités d'une arête.

Nous pouvons utiliser cette représentation pour analyser une partie de «ôte simplexe» avec un 3-simplexe, qui équivaut à une partie de «un sous-ensemble à emporter» pour $n = 4$. La position initiale est un tétraèdre. La figure 1 illustre une série de mouvements autorisés. Une étude systématique des parties montre que Barbara a une stratégie gagnante pour $n = 4$, $n = 5$ et $n = 6$. D. Gale n'a pas encore réussi à démontrer que Barbara a une stratégie gagnante quel que soit n . Quelle est la stratégie gagnante de Barbara pour

n supérieur à trois ? Doit-elle toujours choisir le complémentaire du choix d'Anastasia ? Quand $n = 4$, Anastasia peut choisir un sommet, une arête ou une face. Lorsqu'elle choisit un sommet, Barbara prend alors le complémentaire, et le jeu se réduit à une partie où $n = 3$: Barbara gagne. Quand Anastasia choisit une face triangulaire, Barbara, en prenant le sommet complémentaire, réduit à nouveau le jeu, et gagne encore.

Cependant, quand Anastasia prend un segment, par exemple $\{1, 2\}$, et Barbara le complémentaire $\{3, 4\}$ (voir la figure 2), le jeu n'est pas réduit à une partie où n est inférieur. Anastasia prend ensuite $\{3\}$: Barbara ne peut choisir le complémentaire $\{1, 2, 4\}$, car c'est un coup non autorisé ; la face triangulaire correspondante a déjà été éliminée. La stratégie du complémentaire échoue ici. Certains mathématiciens ont proposé que pour tout n , Barbara a intérêt à choisir le complémentaire du coup d'Anastasia. Toutefois, cette stratégie n'est pas possible à chaque coup.

Anastasia est-elle condamnée à perdre chaque partie ? Les ordinateurs aideront à répondre à cette question pour des petites valeurs de n . Pour des n supérieurs, la réponse nécessite une approche plus fine.

Réactions

Ron Menendez, de Chatham, a découvert une propriété intéressante du triangle de Sierpinski (voir *Le triangle omniprésent*, Pour la Science, septembre 1999). Choisissez un point X de l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC , puis un des sommets au hasard (par exemple, avec un dé). Le milieu du segment joignant X à ce sommet devient le nouveau point X . Répétez la procédure en choisissant à chaque fois un sommet au hasard. Pour la plupart des points initiaux, l'ensemble des points obtenus forme le triangle de Sierpinski.

La théorie des formes fractales autosimilaires de Michael Barnsley explique cet étrange résultat. Le triangle de Sierpinski ABC est composé de trois copies réduites de lui-même, dont les côtés ont une longueur égale à la moitié du triangle ABC initial. Le milieu d'un segment joignant un point quelconque du triangle de Sierpinski et l'un des sommets A , B ou C appartient aussi au triangle de Sierpinski. Cette particularité correspond aux chemins aléatoires de R. Menendez. M. Barnsley a démontré que tout chemin aléatoire de ce type converge vers le triangle de Sierpinski.

