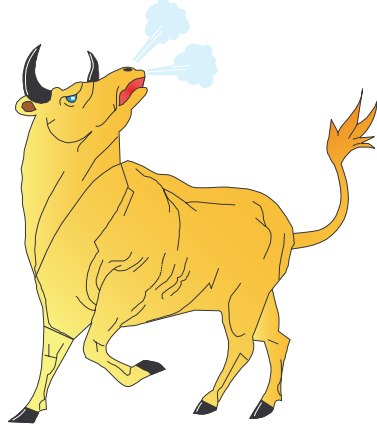




Le troupeau du soleil

IAN STEWART

Archimède a énoncé un problème qu'il était incapable de résoudre.

En 1917, le mathématicien britannique Henry Dudeney décrit un curieux problème inspiré de la bataille de Hastings, lors de laquelle les Normands de Guillaume le Conquérant (1027-1087) ont battu les Saxons du roi Harold (1022-1066), le 14 octobre 1066. Selon Dudeney, une ancienne chronique de la bataille précise que «les hommes d'Harold étaient très groupés et formaient 61 carrés identiques. Lorsque Harold rejoignait ses troupes, les Saxons s'organisaient en un nouveau et puissant carré». Quelle est la plus petite valeur du nombre de Saxons pour laquelle ces formations sont possibles ?

En termes mathématiques, il s'agit de trouver le plus petit carré, tel que son produit par 61 augmenté de 1 soit encore un carré. Nous cherchons donc les solutions en nombres entiers de l'équation $y^2 = 61x^2 + 1$, qui est un exemple d'équation de Pell (ainsi nommée à tort d'après un obscur mathématicien du XVII^e siècle dont les contributions à cette question n'ont pas été originales). Les équations de ce type, où 61 peut être remplacé par un entier positif non carré, ont une infinité de solutions que l'on détermine par la méthode des fractions continues (des fractions telles que $a + 1/(b + 1/(c + 1/...))$).

Afin de nous échauffer, changeons de bataille et considérons celle, moins

connue, de Brighton, où les soldats du roi Harold formaient cette fois 11 carrés, le reste du problème étant inchangé (voir la figure 1). On résout l'équation correspondante ($y^2 = 11x^2 + 1$) par tâtonnements : la plus petite solution est $x = 3$ et $y = 10$.

Cette méthode ne permet pas de résoudre le problème de Dudeney (sauf si l'on utilise un ordinateur), car la plus petite solution est $x = 226\ 153\ 980$ et $y = 1\ 766\ 319\ 049$. Les solutions de l'équation de Pell $y^2 = Dx^2 + 1$ varient beaucoup selon le coefficient D . Pour certaines valeurs de D (29, 46, 53, 58, 61, 67, 73, 76, 85, 86, 89, 93, 94 et 97), la plus petite solution est supérieure à 1 000, et les tâtonnements sont impossibles. Parmi ces valeurs, la plus difficile, et de beaucoup, est 61 : le choix de Dudeney est judicieux ! Avec quelques efforts, vous résoudrez les équations pour D égal à 60 ou à 62 (les réponses sont données à la fin de l'article).

Toutefois, Dudeney aurait pu compliquer encore son problème en choisissant $D = 1\ 597$: la plus petite solution est approximativement $x = 1,3 \cdot 10^{46}$ et $y = 5,2 \cdot 10^{47}$. Et pour $D = 9\ 781$, le problème est pire encore !

L'équation de Pell se retrouve dans le célèbre problème du troupeau du soleil. En 1773, le dramaturge allemand Gotthold Lessing (1729-1781) a découvert

un manuscrit où une énigme est exprimée en vers : 22 couplets élégiaques que l'auteur présumé, le mathématicien grec Archimède (-287/-212), aurait envoyé en 250 avant notre ère à Ératosthène de Cyrène (-284/-192), le bibliothécaire en chef de la bibliothèque d'Alexandrie. Le poème commence ainsi : «Si tu es appliqué et sage, ô étranger, calcule le nombre de têtes du troupeau du soleil qui, il y a bien longtemps, paissaient dans les prairies de la trinacrienne île de Sicile.» La Trinacrie, qui signifie à *trois caps rocheux*, est l'ancien nom de la Sicile.

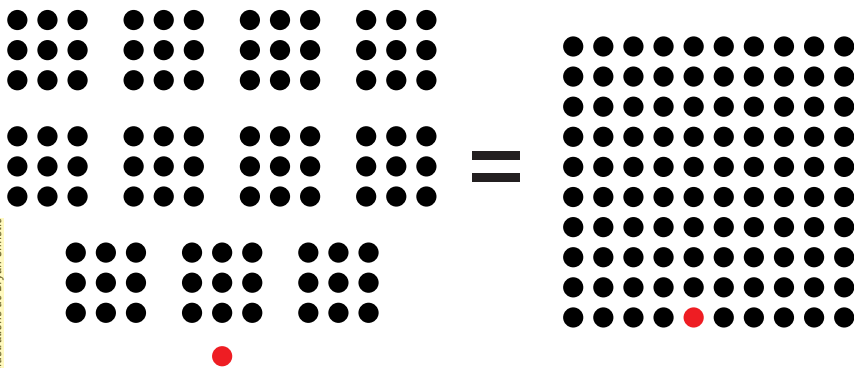
Selon l'*Odyssée* d'Homère, les bovins du soleil étaient 350. Toutefois, Archimède pensait à un nombre bien supérieur : son énoncé stipule que le troupeau est composé de taureaux blancs (B), noirs (N), jaunes (J), tachetés (T) et de vaches de variétés équivalentes (b , n , j , t). Les nombres de chaque type de bovins remplissent sept conditions «faciles» à satisfaire et deux «difficiles» : les premières s'expriment par un système à sept équations et huit variables (voir la figure 2).

La première condition difficile indique que $B + N$, le nombre total de taureaux blancs et noirs, est un carré parfait ; la seconde, que $J + T$, les taureaux jaunes et tachetés, est un nombre triangulaire, c'est-à-dire de la forme $1 + 2 + 3 + \dots + m$, où m est un entier positif.

Des sept premières conditions, on déduit que les huit inconnues sont les multiples déterminés d'un même entier positif k :

$B = 10\ 366\ 482k$
 $N = 7\ 460\ 514k$
 $J = 4\ 149\ 387k$
 $T = 7\ 358\ 060k$
 $b = 7\ 206\ 360k$
 $n = 4\ 893\ 246k$
 $j = 5\ 439\ 213k$
 $t = 3\ 515\ 820k$.

Quelle est la plus petite valeur de k qui satisfait les deux conditions difficiles ? En 1830, le mathématicien allemand J. Wurm a résolu une version simplifiée de l'énigme, où il ne conserve pas la condition que « $B + N$ soit un carré». De la condition qui impose un nombre $J + T$ triangulaire, on déduit que $92\ 059\ 576k + 1$



Illustrations de Bryan Christie

1. Une armée de 99 hommes (points noirs), telle celle du roi Harold, peut être disposée en onze carrés de neuf hommes sans le roi, et en un grand carré de dix hommes de côté lorsque le roi se joint à ses soldats. Les nombres $x = 3$ et $y = 10$ sont la plus petite solution de l'équation $y^2 = 11x^2 + 1$.