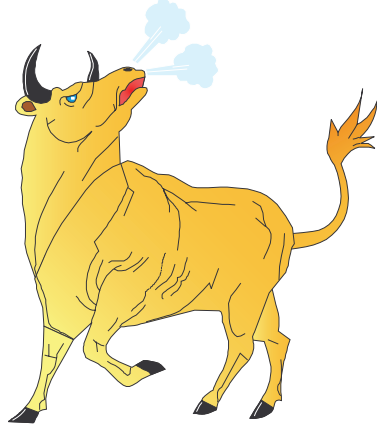




Le troupeau du soleil

IAN STEWART

Archimède a énoncé un problème qu'il était incapable de résoudre.

En 1917, le mathématicien britannique Henry Dudeney décrit un curieux problème inspiré de la bataille de Hastings, lors de laquelle les Normands de Guillaume le Conquérant (1027-1087) ont battu les Saxons du roi Harold (1022-1066), le 14 octobre 1066. Selon Dudeney, une ancienne chronique de la bataille précise que «les hommes d'Harold étaient très groupés et formaient 61 carrés identiques. Lorsque Harold rejoignait ses troupes, les Saxons s'organisaient en un nouveau et puissant carré». Quelle est la plus petite valeur du nombre de Saxons pour laquelle ces formations sont possibles ?

En termes mathématiques, il s'agit de trouver le plus petit carré, tel que son produit par 61 augmenté de 1 soit encore un carré. Nous cherchons donc les solutions en nombres entiers de l'équation $y^2 = 61x^2 + 1$, qui est un exemple d'équation de Pell (ainsi nommée à tort d'après un obscur mathématicien du XVII^e siècle dont les contributions à cette question n'ont pas été originales). Les équations de ce type, où 61 peut être remplacé par un entier positif non carré, ont une infinité de solutions que l'on détermine par la méthode des fractions continues (des fractions telles que $a + 1/(b + 1/(c + 1/...))$).

Afin de nous échauffer, changeons de bataille et considérons celle, moins

connue, de Brighton, où les soldats du roi Harold formaient cette fois 11 carrés, le reste du problème étant inchangé (voir la figure 1). On résout l'équation correspondante ($y^2 = 11x^2 + 1$) par tâtonnements : la plus petite solution est $x = 3$ et $y = 10$.

Cette méthode ne permet pas de résoudre le problème de Dudeney (sauf si l'on utilise un ordinateur), car la plus petite solution est $x = 226\ 153\ 980$ et $y = 1\ 766\ 319\ 049$. Les solutions de l'équation de Pell $y^2 = Dx^2 + 1$ varient beaucoup selon le coefficient D . Pour certaines valeurs de D (29, 46, 53, 58, 61, 67, 73, 76, 85, 86, 89, 93, 94 et 97), la plus petite solution est supérieure à 1 000, et les tâtonnements sont impossibles. Parmi ces valeurs, la plus difficile, et de beaucoup, est 61 : le choix de Dudeney est judicieux ! Avec quelques efforts, vous résoudrez les équations pour D égal à 60 ou à 62 (les réponses sont données à la fin de l'article).

Toutefois, Dudeney aurait pu compliquer encore son problème en choisissant $D = 1\ 597$: la plus petite solution est approximativement $x = 1,3 \cdot 10^{46}$ et $y = 5,2 \cdot 10^{47}$. Et pour $D = 9\ 781$, le problème est pire encore !

L'équation de Pell se retrouve dans le célèbre problème du troupeau du soleil. En 1773, le dramaturge allemand Gotthold Lessing (1729-1781) a découvert

un manuscrit où une énigme est exprimée en vers : 22 couplets élégiaques que l'auteur présumé, le mathématicien grec Archimède (-287/-212), aurait envoyé en 250 avant notre ère à Ératosthène de Cyrène (-284/-192), le bibliothécaire en chef de la bibliothèque d'Alexandrie. Le poème commence ainsi : «Si tu es appliqué et sage, ô étranger, calcule le nombre de têtes du troupeau du soleil qui, il y a bien longtemps, paissaient dans les prairies de la trinacrienne île de Sicile.» La Trinacrie, qui signifie à *trois caps rocheux*, est l'ancien nom de la Sicile.

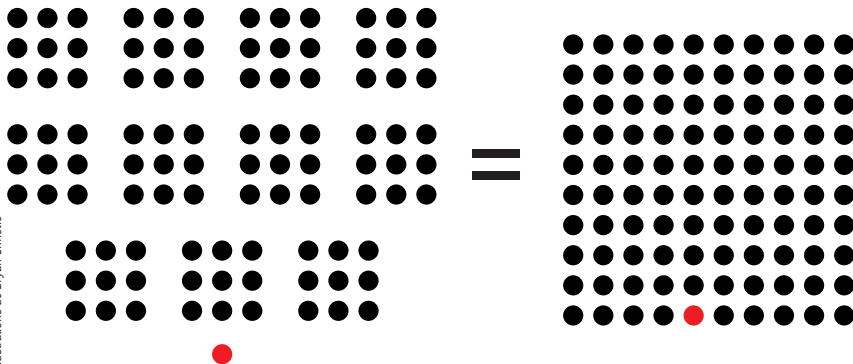
Selon l'Odyssée d'Homère, les bovins du soleil étaient 350. Toutefois, Archimède pensait à un nombre bien supérieur : son énoncé stipule que le troupeau est composé de taureaux blancs (B), noirs (N), jaunes (J), tachetés (T) et de vaches de variétés équivalentes (b, n, j, t). Les nombres de chaque type de bovins remplissent sept conditions «faciles» à satisfaire et deux «difficiles» : les premières s'expriment par un système à sept équations et huit variables (voir la figure 2).

La première condition difficile indique que $B + N$, le nombre total de taureaux blancs et noirs, est un carré parfait ; la seconde, que $J + T$, les taureaux jaunes et tachetés, est un nombre triangulaire, c'est-à-dire de la forme $1 + 2 + 3 + \dots + m$, où m est un entier positif.

Des sept premières conditions, on déduit que les huit inconnues sont les multiples déterminés d'un même entier positif k :

$B = 10\ 366\ 482k$
 $N = 7\ 460\ 514k$
 $J = 4\ 149\ 387k$
 $T = 7\ 358\ 060k$
 $b = 7\ 206\ 360k$
 $n = 4\ 893\ 246k$
 $j = 5\ 439\ 213k$
 $t = 3\ 515\ 820k$.

Quelle est la plus petite valeur de k qui satisfait les deux conditions difficiles ? En 1830, le mathématicien allemand J. Wurm a résolu une version simplifiée de l'énigme, où il ne conserve pas la condition que « $B + N$ soit un carré». De la condition qui impose un nombre $J + T$ triangulaire, on déduit que $92\ 059\ 576k + 1$



1. Une armée de 99 hommes (points noirs), telle celle du roi Harold, peut être disposée en onze carrés de neuf hommes sans le roi, et en un grand carré de dix hommes de côté lorsque le roi se joint à ses soldats. Les nombres $x = 3$ et $y = 10$ sont la plus petite solution de l'équation $y^2 = 11x^2 + 1$.

est un carré : avec la plus petite valeur de k adéquate, le troupeau du soleil contient 5 916 837 175 686 animaux.

Cependant, l'équation de Wurm a une infinité de solutions. On peut alors chercher, parmi elles, la plus petite, telle que $B + N$ soit un carré. En 1880, un autre mathématicien allemand, A. Amthor, a prouvé que k est égal à $4\,456\,749p^2$, p satisfaisant l'équation de Pell selon laquelle $410\,286\,423\,278\,424p^2 + 1$ est un carré. La méthode des fractions continues permet de calculer la plus petite valeur de p . Amthor n'est pas venu à bout des calculs, mais il a montré que le nombre total de bovins est un nombre de 206 545 chiffres, dont il a déterminé les quatre premiers.

Entre 1889 et 1893, le club de mathématiques d'Hillsboro a calculé les 32 premiers chiffres, dont deux étaient faux. Enfin, en 1965, la première solution complète a été calculée par des mathématiciens de l'Université de Waterloo. En 1981, Harry Nelson a publié les 206 545 chiffres qu'un superordinateur CRAY-1 a calculé en dix minutes.

Bien que la solution ait été trouvée, le problème du troupeau du soleil a continué d'intriguer les mathématiciens, qui disposent aujourd'hui d'ordinateurs très rapides capables de calculer avec des milliers de décimales. Grâce au logiciel *Mathematica*, Ilan Vardi, du Collège occidental, a refait toute l'analyse qui précède en quelques secondes. Puis il a déterminé une formule exacte de la taille du troupeau. Sur une station de travail d'une marque fort à propos (*Sun*, qui signifie «soleil» en anglais), le calcul a duré 90 minutes. Le nombre de têtes, dans le troupeau du soleil est le plus petit entier supérieur à $(p + q)(a + b\sqrt{4729494})^{4658}$, avec :

$$p = 25\,194\,541$$

$$q = 184\,119\,152$$

$$a = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$$

$$b = 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340.$$

Archimède a-t-il vraiment posé ce problème ? Selon les historiens, il est bien l'auteur du problème, mais il ne l'a pas formalisé en un poème. En revanche, il ne l'a certainement pas résolu : les nombres en jeu sont trop grands et les calculs, à la main, sont trop longs. Archimède savait-il que son équation a des solutions ? Probablement pas. Toutefois, il était sans doute capable de concevoir quel type d'équations était en jeu. Est-il bien raisonnable de ne pas connaître la réponse d'une énigme que l'on propose ?

Réponses : pour $D = 60$, $x = 4$ et $y = 31$; pour $D = 62$, $x = 8$ et $y = 63$.

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times N + J \\
 N &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times T + J \\
 T &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \times B + J \\
 B &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times (N + n) \\
 n &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times (T + t) \\
 j &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \times (B + b) \\
 t &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \times (J + j)
 \end{aligned}$$

2. Ces sept équations expriment les sept premières conditions – les conditions faciles – à satisfaire par les huit variétés d'animaux du problème du troupeau du soleil.

Réactions

Dans l'article «Chœurs lumineux» (voir *Pour la Science*, mai 1999), je demandais aux lecteurs de me faire part de leurs découvertes à propos de damiers sur lesquels des lucioles ne peuvent se synchroniser. Cindy Eisner, en Israël, a analysé toutes les plaques de tailles modérées et précisé, pour chaque cas, la taille du plus grand groupe de lucioles pour lesquelles il n'y a pas de paires convergentes, c'est-à-dire de paires de lucioles qui synchronisent leur flash, ainsi que le nombre d'états initiaux qui ne mènent à aucune synchronisation. Par exemple, sur une plaque carrée de quatre cases de côté, le plus grand groupe sans paires convergentes a quatre lucioles placées au départ sur les cases 1, 4, 7 et 11 (voir la figure). Sur une plaque de 15 cases de côté, le plus grand groupe de lucioles non convergentes a 15 éléments disposés sur les cases 0, 4, 6, 8, 11, 13, 17, 21, 24, 27, 31, 37, 41, 46 et 51. Dans ce dernier exemple, il existe 124 523 états initiaux qui ne mènent pas à une synchronisation, sur un total de $7,20\,576 \cdot 10^{16}$ états possibles.

De surcroît, quelle que soit la taille de la plaque, un groupe de deux lucioles a toujours une position initiale pour laquelle elles ne se synchronisent pas : par exemple, pour une plaque à n cases de côté, les cases 0 et $2n-3$. C. Eisner conjecture que ces deux positions sont les seules.

