

est un carré : avec la plus petite valeur de k adéquate, le troupeau du soleil contient 5 916 837 175 686 animaux.

Cependant, l'équation de Wurm a une infinité de solutions. On peut alors chercher, parmi elles, la plus petite, telle que $B + N$ soit un carré. En 1880, un autre mathématicien allemand, A. Amthor, a prouvé que k est égal à $4\,456\,749p^2$, p satisfaisant l'équation de Pell selon laquelle $410\,286\,423\,278\,424p^2 + 1$ est un carré. La méthode des fractions continues permet de calculer la plus petite valeur de p . Amthor n'est pas venu à bout des calculs, mais il a montré que le nombre total de bovins est un nombre de 206 545 chiffres, dont il a déterminé les quatre premiers.

Entre 1889 et 1893, le club de mathématiques d'Hillsboro a calculé les 32 premiers chiffres, dont deux étaient faux. Enfin, en 1965, la première solution complète a été calculée par des mathématiciens de l'Université de Waterloo. En 1981, Harry Nelson a publié les 206 545 chiffres qu'un superordinateur CRAY-1 a calculé en dix minutes.

Bien que la solution ait été trouvée, le problème du troupeau du soleil a continué d'intriguer les mathématiciens, qui disposent aujourd'hui d'ordinateurs très rapides capables de calculer avec des milliers de décimales. Grâce au logiciel *Mathematica*, Ilan Vardi, du Collège occidental, a refait toute l'analyse qui précède en quelques secondes. Puis il a déterminé une formule exacte de la taille du troupeau. Sur une station de travail d'une marque fort à propos (*Sun*, qui signifie «soleil» en anglais), le calcul a duré 90 minutes. Le nombre de têtes, dans le troupeau du soleil est le plus petit entier supérieur à $(p + q)(a + b\sqrt{4729494})^{4658}$, avec :

$$p = 25\,194\,541$$

$$q = 184\,119\,152$$

$$a = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$$

$$b = 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340$$

Archimède a-t-il vraiment posé ce problème ? Selon les historiens, il est bien l'auteur du problème, mais il ne l'a pas formalisé en un poème. En revanche, il ne l'a certainement pas résolu : les nombres en jeu sont trop grands et les calculs, à la main, sont trop longs. Archimède savait-il que son équation a des solutions ? Probablement pas. Toutefois, il était sans doute capable de concevoir quel type d'équations était en jeu. Est-il bien raisonnable de ne pas connaître la réponse d'une énigme que l'on propose ?

Réponses : pour $D = 60$, $x = 4$ et $y = 31$; pour $D = 62$, $x = 8$ et $y = 63$.

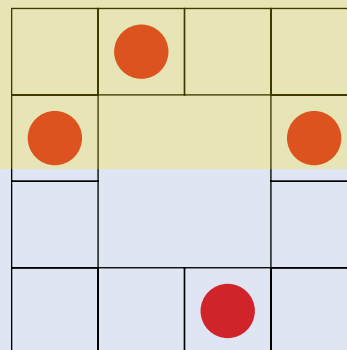
$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times N + J \\
 N &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times T + J \\
 T &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \times B + J \\
 B &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times (N + n) \\
 n &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times (T + t) \\
 j &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \times (B + b) \\
 t &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \times (J + j)
 \end{aligned}$$

2. Ces sept équations expriment les sept premières conditions – les conditions faciles – à satisfaire par les huit variétés d'animaux du problème du troupeau du soleil.

Réactions

Dans l'article «Chœurs lumineux» (voir *Pour la Science*, mai 1999), je demandais aux lecteurs de me faire part de leurs découvertes à propos de damiers sur lesquels des lucioles ne peuvent se synchroniser. Cindy Eisner, en Israël, a analysé toutes les plaques de tailles modérées et précisé, pour chaque cas, la taille du plus grand groupe de lucioles pour lesquelles il n'y a pas de paires convergentes, c'est-à-dire de paires de lucioles qui synchronisent leur flash, ainsi que le nombre d'états initiaux qui ne mènent à aucune synchronisation. Par exemple, sur une plaque carrée de quatre cases de côté, le plus grand groupe sans paires convergentes a quatre lucioles placées au départ sur les cases 1, 4, 7 et 11 (voir la figure). Sur une plaque de 15 cases de côté, le plus grand groupe de lucioles non convergentes a 15 éléments disposés sur les cases 0, 4, 6, 8, 11, 13, 17, 21, 24, 27, 31, 37, 41, 46 et 51. Dans ce dernier exemple, il existe 124 523 états initiaux qui ne mènent pas à une synchronisation, sur un total de $7,20\,576 \cdot 10^{16}$ états possibles.

De surcroît, quelle que soit la taille de la plaque, un groupe de deux lucioles a toujours une position initiale pour laquelle elles ne se synchronisent pas : par exemple, pour une plaque à n cases de côté, les cases 0 et $2n-3$. C. Eisner conjecture que ces deux positions sont les seules.



LES NOMBRES DE 0 À 40 ORDONNÉS, PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE!

cinq	seize	trois
deux	sept	un
dix	six	vingt
dix-huit	treize	vingt-cinq
dix-neuf	trente	vingt-deux
dix-sept	trente-cinq	vingt et un
douze	trente-deux	vingt-huit
huit	trente et un	vingt-neuf
neuf	trente-huit	vingt-quatre
onze	trente-neuf	vingt-sept
quarante	trente-quatre	vingt-six
quatorze	trente-sept	vingt-trois
quatre	trente-six	zéro.
quinze	trente-trois	

Des nombres à la lettre...

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'écriture des nombres débouche sur un monde mathématico-littéraire où les «liponombres» sont un fleuron divertissant.

Le radical lipo vient du grec *leipo* «je laisse». Il sert de racine à quelques mots français : *lipothymie*, qui signifie brève perte de connaissance, et, sujet de cet article, *lipogramme*. Ce mot a été dérivé en lipogrammatique, lipogrammatiste, liponombre et lipopremier (de création récente, on va le voir).

Un lipogramme est, d'après le *Grand Larousse*, «une œuvre littéraire, en prose ou en vers, où l'on s'astreint à ne pas faire entrer une ou plusieurs lettres de l'alphabet». Comme le remarque Georges Perec

(auteur d'un fameux roman sans «e», *La disparition*), il serait malheureux de croire que lipogramme signifie lettre grasse ou, pire, un gramme de graisse! Bien sûr, il existe aussi de nombreux mots français commençant par lipo ou lipi qui proviennent cette fois de la racine grecque lipos signifiant «graisse» : lipide, liposoluble, etc. Pour corser le tout s'ajoute la LiPo, abréviation de Littérature Potentielle, qui est l'objet d'étude de l'Oulipo (Ouvroir de Littérature Potentielle), mouvement littéraire qui pratique et théorise les jeux for-

mels avec les textes littéraires, dont le lipogramme est l'exemple le plus pur.

Les lipogrammes ne sont pas universellement appréciés. Bescherelle, père et fils, en 1833, indiquaient que «les ouvrages lipogrammatiques sont de vaines puérilités». Il n'empêche que leur art est ancien et a été pratiqué dans de nombreuses langues, depuis fort longtemps et par de beaux esprits. Le mot existe en anglais : *lipogram*, en espagnol : *lipogramacia* ou *lipograma*, en allemand : *leipogram* ou *lipogram*.

On n'a pas attendu le xx^e siècle pour s'adonner à ce jeu de lettres et, selon Georges Perec, le plus ancien lipogrammatiste serait Lasos d'Hermione (qui vécut pendant la seconde moitié du vi^e siècle avant J.-C.), qui n'aimait pas la lettre *sigma*, le «s» grec, et dont il se priva dans une *Ode aux Centaures*, texte dont il ne reste aujourd'hui aucune trace, et dans un *Hymne à Demeter*, dont seul le premier vers nous est parvenu!

Au iii^e siècle, Nestor de Laranda conçut le projet fou de récrire l'*Iliade* en se privant de l'*alpha* dans le premier chant, du *bêta* dans le second, du *gamma* dans le troisième, etc. Deux cents ans plus tard, Tryphiodore de Sicile compléta le travail en récrivant l'*Odyssée* selon le même procédé. Ces textes, comme les précédents, ont été perdus, et le premier lipogramme attesté est le *De Aetatibus* de Fabius Planciade Fulgentius, qui ne contient pas de «a» dans son premier chapitre, pas de «b» dans le second, etc. Au début du $xvii^e$ siècle se constitua en Allemagne et en Italie une tradition de lipogrammes en «r» qui a persisté jusqu'à nos jours. Le fait d'armes de cette tradition est un roman sans «r» de 198 pages écrit par Franz Rittler au début du xix^e , et intitulé *Die Zwillinge* (Les jumeaux). Depuis, bien d'autres exploits ont été réalisés, et les lecteurs intéressés les trouveront détaillés dans *Une histoire du*

1. GRANDS NOMBRES : ARCHIMÈDE ET LES INDIENS

Pour les puissances de 10, les Indiens (d'Inde!) furent supérieurs aux autres civilisations. Les anciens Grecs et les Chinois se sont arrêtés à la myriade (10^4) et se sont contentés de la répéter : 10^8 = une myriade de myriades ; 10^{12} = une myriade de myriades de myriades, etc. Ils lisaient ainsi le nombre 52 3622 1984 4368 2439, cinquante-deux myriades de myriades de myriades de myriades trois mille six cent vingt-deux myriades de myriades de myriades mille neuf cent quatre-vingt-quatre myriades de myriades quatre mille trois cent soixante-huit myriades deux mille quatre cent trente-neuf.

Conscient que cette opération de répétition pouvait engendrer de très grands nombres, Archimède, qui voulait dans l'*Arénaire* (le "compteur de sable") se faire une idée du nombre de grains de sable contenus dans une sphère ayant pour centre la Terre et atteignant le Soleil, s'est imaginé poursuivre la double étape de répétition une myriade de myriades de fois. Il en arrive ainsi à concevoir le nombre que nous noterions aujourd'hui $10^{8 \times 10^8}$, c'est-à-dire un "1" suivi de huit cent millions de zéros. Ce nombre fut, durant longtemps, le plus grand nombre imaginé par un être humain.

À la place de la myriade, les Arabes avaient pour palier le millier (mille, un millier de milliers, un millier de milliers de milliers, etc.). Ils obtenaient donc une écriture plus longue encore que celle des Grecs.

À partir du iii^e siècle, les Indiens avaient choisi un nom pour chaque puissance de dix jusqu'à 10^{17} , de sorte, que pour eux, le nombre 523622198443682439 est (en traduisant les chiffres en français et en écrivant – comme les Indiens – les unités en tête, puis les dizaines, etc.) : neuf et trois dasha et quatre shata et deux sahasra et huit ayuta et six laksha et trois prayuta et quatre koti et quatre vyarbuda et huit padma et neuf kharva et un nikharva et deux mahapadma et deux shankha et six samundra et trois madhya et deux antya et cinq parardha. Cette notation sanskrite suggère de ne faire apparaître que les chiffres (sans mentionner les termes dasha, shata, etc.), ce qui conduit à la notation décimale de position.