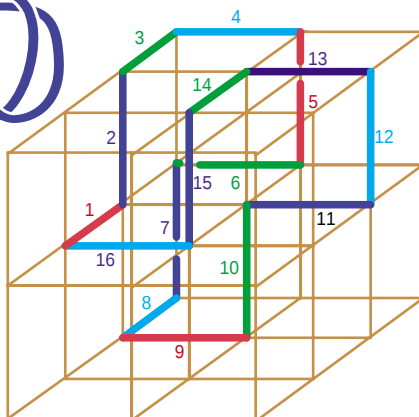


JEU-CONCOURS N° 72

PIERRE TOUGNE

Molécules nouées

Les polymères sont des macromolécules formées par la répétition d'un même motif appelé monomère. Imaginons que ces monomères sont représentés par les segments d'un réseau cubique et que les liaisons peuvent se faire dans les quatre directions de l'espace ; cherchons alors le minimum de monomères pour construire un polymère noué (au sens mathématique c'est-à-dire qu'il se referme sur lui-même) ou un polymère entrelacé. Pour le nœud trivial (une boucle), c'est évidemment 4 monomères, de même pour l'entrelacs le plus simple (deux boucles entrelacées) il faut déjà 16 monomères. Dès que l'on passe à des nœuds ou entrelacs plus compliqués, cela devient vite inextricable. L'objet du concours de ce mois-ci est de trouver le nombre minimum de monomères sur un réseau cubique pour réaliser le nœud de trèfle. La démonstration que c'est effectivement un minimum n'est pas demandée ; en revanche, un beau dessin est souhaité.



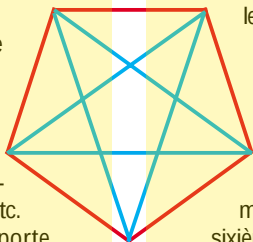
Nœud de trèfle et polymère non noué à 16 monomères sur réseau cubique

Envoyez vos réponses aux questions à *Pour la Science*, 8, rue Férou, 75278 Paris Cedex 06. Parmi les réponses exactes reçues en juin 2000, dix gagnants recevront un livre.

RÉPONSE AU JEU-CONCOURS N° 70

L'ordre lexicographique étant «moins familier» que l'ordre des nombres entiers, raisonnons sur les entiers de 1 à 26, ce qui est équivalent. Montrons qu'avec les entiers de 1 à 25 on peut construire une suite de ces nombres, de telle sorte que les sous-suites croissantes ou décroissantes que l'on peut extraire comportent au plus cinq nombres : 21, 22, 23, 24, 25, 16, 17, 18, 19, 20, 11, 12, 13, 14, 15, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5

Le déplacement de n'importe quel nombre créera nécessairement une sous-suite croissante ou décroissante de 6 nombres : par exemple, si l'on déplace 8 entre 24 et 25, on fera apparaître la sous-suite croissante 8, 11, 12, 13, 14, 15 etc. Ajoutons le nombre 26 à n'importe quel rang : il y aura toujours une sous-suite de 6 nombres croissants ou décroissants et cela quel que soit le réarrangement de cette suite que l'on peut imaginer pour supprimer cette sous-suite, car on fera apparaître toujours une sous-suite de 6 nombres parmi les nombres de 1 à 25 d'après la remarque précédente. Ce résultat est un cas particulier du théorème d'Erdős et Skewes qui énonce que de toute suite de $mn + 1$ entiers positifs distincts, on peut extraire une sous-suite décroissante de longueur au moins $m + 1$ ou on peut extraire une sous-suite croissante de longueur au moins $n + 1$.



Dans le deuxième problème j'ai omis dans son énoncé la formule «deux à deux», *mea culpa*. Il aurait fallu lire : soit trois nombres ayant un diviseur commun deux à deux, soit trois nombres sont premiers entre eux deux à deux. En voici néanmoins une solution. Représentons les nombres par les sommets d'un polygone régulier et colorons les segments joignant deux sommets quelconques en bleu si les deux nombres sont premiers entre eux et en rouge dans le cas contraire. Quel est le plus petit nombre de sommets du polygone régulier pour être certain qu'il y aura un triangle rouge ou bleu ? Le pentagone montre que cinq sommets sont insuffisants. Ajoutons un sixième sommet, de ce sommet partons cinq segments vers les cinq autres sommets dont trois au moins seront de la même couleur. Si celle-ci est rouge, on formera un triangle rouge avec une arête du pentagone, si elle est bleue, on formera un triangle bleu avec une diagonale donc la propriété énoncée est inévitable avec six nombres quelconques. Ce nombre s'appelle nombre de Ramsey (voir *Pour la Science*, n° 155, septembre 1990) noté $R_2(3) = 6$. Pour quatre nombres entiers (soit un quadrilatère monochrome), le résultat est $R_2(4) = 18$, mais la démonstration est beaucoup plus compliquée. Enfin $R_2(5)$ n'est pas connu, on sait seulement qu'il est entre 43 et 49.

VIDE

2000

6 - 7 - 8 Juin

Alpexpo
Grenoble

2^{ème} Salon
des Professionnels
du Vide

Exposition
Conférences
Formations

Vide Industriel
Vide Poussé
Microélectronique
Nanotechnologies

- Tél 01 53 01 90 30 -
- Fax 01 42 78 63 20 -
<http://www.vide.org>

CEPS - Société Française du
Vide