

Moustiques et femmes enceintes

Une étude réalisée en Gambie sur 72 femmes, dont 36 enceintes, montre que ces dernières attirent deux fois plus les moustiques que les autres, à cause des modifications physiologiques et comportementales qui accompagnent leur nouvel état : une femme enceinte expire un volume d'air supérieur à la normale et la température de son abdomen augmente de 0,7°C, de sorte que sa peau dégage plus de substances volatiles. Les moustiques les repèrent plus facilement. Les femmes enceintes doivent redoubler de vigilance vis-à-vis des moustiques, vecteurs du paludisme dans cette région.

Le champ de la vie

Alors que les molécules chimiques peuvent exister en deux variétés, images l'une de l'autre dans un miroir, les molécules de la vie existent uniquement en une variété. Quel mécanisme a-t-il favorisé ou engendré cette sélection ? Au Laboratoire des champs magnétiques intenses de Grenoble, des physiciens ont réalisé une réaction chimique où l'une de ces deux variétés était produite en plus grande quantité. Comment ? À l'aide d'un champ magnétique statique et de lumière. Ainsi, à une époque de l'histoire de la vie, le champ magnétique aurait pu influencer sur la production des molécules de la vie. Cette découverte relance le débat sur l'origine de la vie. Le champ magnétique terrestre a-t-il été suffisamment important pour favoriser l'émergence de ces molécules ?

Défi à la pesanteur

Le gecko est un lézard tropical qui fait mieux que Spiderman : il marche sur les murs et les plafonds, la tête en bas, aussi facilement que nous marchons sur le sol. Son secret ? Ses coussinets plantaires comportent des rangées de poils minuscules, ramifiés, composés de kératine, la même protéine que celle des cheveux humains ou des plumes des oiseaux. Une équipe de l'Université de Portland a mesuré, par microscopie à force atomique, les forces que ces poils exercent sur les surfaces contre lesquelles ils se collent. Cette adhérence est due à des forces dites de Van der Waals, et la bonne adhérence résulte de la ramification des poils, les divers segments qui les constituent s'alignant parallèlement au support.

Les problèmes du XXI^e siècle

L'auditoire du Collège de France, un concentré de talents mathématiques, plus le Ministre de la recherche, célébraient le 24 mai, le centenaire des problèmes posés par le mathématicien David Hilbert au Congrès des mathématiciens de Paris. La commémoration était solennelle et les participants étaient émus d'entendre la profession de foi de Hilbert «...Il n'y a pas d'ignorabimus en mathématiques, nous devons savoir, nous saurons», depuis devenu célèbre. Hilbert (*en médaillon*) se trompait, car il a été démontré qu'il existe des propositions indécidables en mathématiques. Il aurait répondu que savoir que l'on ne pourra pas tout savoir est quand même savoir.

Les 23 problèmes posés par Hilbert ont inspiré et guidé les mathématiciens durant tout le xx^e siècle. Douze ont été résolus, huit étaient assez généraux pour qu'ils soient encore des sujets d'intérêt, et l'une des questions non résolues, l'hypothèse de Riemann, reste le plus important problème ouvert des mathématiques. Hilbert avait dit que s'il se réveillait après plusieurs millénaires de sommeil, la première chose qu'il demanderait est : la conjecture de Riemann a-t-elle été démontrée ?

Cette hypothèse est l'un des sept problèmes que les conseillers mathématiciens de l'Institut de mathématiques fondé par Landon Clay ont choisi de poser pour célébrer le nouveau millénaire. Tout mathématicien qui résoudra l'un de ces problèmes sera récompensé par un prix d'un million de dollars.

La tradition des prix à sujet imposé avait presque disparu, et c'était dommage, car certains d'entre eux ont, par le passé, notablement contribué à l'avancement des mathématiques. Ainsi, le prix du roi Oscar de Suède, à la fin du xix^e siècle, a vu le succès des idées de Poincaré sur le problème des trois corps en interaction gravitationnelle, problème qui a inspiré de nombreux continuuateurs de Poincaré. Les idées mathématiques avancées par Poincaré restent d'actualité : une de ses conjectures est encore ouverte et constitue l'un des prix Clay. Notons que, signe

des temps, un génèreux industriel a remplacé un royal mécène.

On a quelquefois opposé les mathématiciens qui résolvent des problèmes à ceux qui construisent des théories, les découvreurs aux inventeurs de mathématiques. Ainsi Alexandre Grothendieck est renommé pour être un *theory builder* et son élève Pierre Deligne un *problem-solver*. Michael Atiyah, médaille Fields comme ces deux mathématiciens cités, illustre la différence en expliquant que, confronté à une «vallée mathématique» qu'il faut franchir, Grothendieck construit des strates de théories jusqu'à ce que la vallée soit comblée par les connaissances, tandis que Deligne lance un pont à travers la vallée. La métaphore est saisissante ; toutefois, pour résoudre les problèmes, il faut des

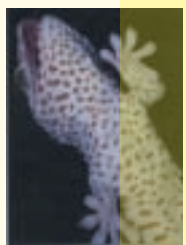
théories sur lesquelles s'appuyer, et ces théories pro-

gressent par l'effort commun de la communauté mathématique. Alain Connes pense que les théories nécessaires à la résolution des problèmes posés embelliront le paysage mathématique.

Les mathématiciens ne se préoccupent, comme d'ailleurs nombre de scientifiques, que de ce qui les intéresse.

Parmi les théorèmes démontrés, la société reconnaîtra les siens, c'est-à-dire ceux qui sont utiles, mais les mathématiciens se targuent de leur incapacité à identifier, positivement ou négativement, les parties inutiles des mathématiques. Leur «égoïsme» produit un bien commun d'un grand intérêt social : par un miracle que nul n'explique, des préoccupations d'intellectuels qui n'ont rien à voir avec la réalité fécondent les sciences. Et les grandes civilisations ont toutes encouragé les mathématiques qui contribuent à leur pérennité glorieuse : les Grecs sont renommés pour leur culture et non pour leur réussite économique.

Le congrès de 1900 réunissait 226 mathématiciens seulement, alors que, dans un congrès de mathématiques annuel aux États Unis, plus de 5 000 mathématiciens sont représentés. En 1900, l'intégralité du savoir mathématique tenait dans 80 volumes, il en faudrait 10 fois plus aujourd'hui... Alors pourquoi sept problèmes seulement ? Parce qu'il était plus noble de limiter le nombre des problèmes et de leur attribuer une grosse récompense ? Un million de dollars est une somme et, 23 millions de dollars, cela faisait beaucoup...



PROBLÈMES DU MILLÉNAIRE

Le problème *P* versus *NP*

C'est samedi soir et vous arrivez dans une soirée au milieu de nombreux invités. Timide, vous vous demandez combien de personnes vous connaissez déjà dans la pièce. Votre hôte vous informe que vous devez certainement connaître Julie, la femme qui se trouve à côté de la table du fond. En une fraction de seconde, vous pouvez jeter un coup d'œil et vérifier si votre hôte a raison. En revanche, si votre hôte ne vous dit rien, vous serez dans l'obligation de faire le tour de la pièce et d'aller voir chaque personne une par une. Voici l'exemple type du phénomène montrant que chercher une solution prend souvent plus de temps que de vérifier l'exactitude d'une solution.

De même, trouver un diviseur de 13 717 421 prend beaucoup plus de temps que de vérifier que ce nombre est égal à 3 607 fois 3 803. Les mathématiciens ont isolé une classe de problèmes qui peuvent être résolus en un temps efficace : les problèmes à temps polynomial. Le problème *P* versus *NP*, formulé par Stephen Cook en 1971, demande si une solution qui peut être vérifiée en un temps polynomial peut également être trouvée en un temps polynomial.

L'hypothèse de Riemann

Certains nombres entiers ont la particularité de ne pas pouvoir être exprimés comme le produit de deux nombres entiers plus petits qu'eux mêmes (par exemple : 2, 3, 5, 7, ... 53, ..., 1 999, ... etc.). Ils sont appelés nombres premiers et jouent un rôle très important dans les mathématiques fondamentales et leurs applications (comme la cryptographie). Bien qu'elle ne semble pas obéir à une règle, la répartition des nombres premiers parmi les entiers est étroitement liée au comportement d'une fonction « $\zeta(s)$ » (lire «dzéta de s») découverte par Euler. L'hypothèse de Riemann affirme que les solutions intéressantes de l'équation $\zeta(s) = 0$ se situent sur une droite. L'hypothèse de Riemann a été vérifiée numériquement pour les 1 500 000 000 premières solutions. Elle contient la clef des mystères entourant la distribution des nombres premiers.

La conjecture de Poincaré

Traçons une courbe fermée (mais qui ne se recoupe pas) à la surface d'un ballon (sphère). Si l'on découpe le ballon le long de cette courbe, on obtient deux morceaux différents. Cependant, cela n'est pas toujours le cas pour des surfaces un peu plus compliquées, comme une chambre à air de vélo (surface appelée «tore» par les mathématiciens). On dit que la sphère est simplement connexe (alors que le tore ne l'est pas). Il est facile de démontrer que toute surface simplement connexe qui est finie (que l'on peut enfermer dans une boîte) et sans bord, est nécessairement la surface d'un objet sphérique. Poincaré a conjecturé qu'une telle caractérisation des objets sphériques continue à être vraie si l'on passe des surfaces à deux dimensions aux espaces à trois dimensions.

Cette question s'est révélée extrêmement difficile et résiste depuis un siècle aux efforts des mathématiciens.

La conjecture de Hodge

Au XX^e siècle, les mathématiciens ont découvert des façons efficaces de décrire la géométrie des objets complexes. L'idée de base est de se demander comment reconstituer la forme d'un objet complexe en assemblant des formes géométriques simples de dimension croissante. Cette technique s'est révélée si puissante qu'elle a permis de créer une multitude d'outils

appelés théories de cohomologie. Grâce à ces théories, les mathématiciens ont effectué d'énormes progrès dans la classification des objets mathématiques. Malheureusement, les origines géométriques de la théorie ont disparu, au fur et à mesure qu'il est devenu nécessaire d'ajouter des éléments qui n'ont plus rien à voir avec la géométrie. La conjecture de Hodge suggère que, pour certains types d'espaces «élégants» (définis par des équations algébriques), les éléments appelés cycles de Hodge peuvent être interprétés comme une combinaison de formes géométriques d'origine algébrique.

La conjecture de Birch Swinnerton-Dyer

Les mathématiciens ont toujours été fascinés par le problème consistant à trouver des solutions aux équations algébriques comme : $x^2 + y^2 = z^2$.

La question de base est de chercher des solutions où x , y , et z sont des nombres entiers. Pour l'équation ci-dessus, on sait depuis Euclide décrire toutes les solutions, mais, pour des polynômes plus compliqués, cela devient extrêmement difficile. En fait, Yu Matijasevich a montré en 1970 que le dixième problème d'Hilbert a une réponse négative, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de méthode générale pour savoir si une telle équation a une solution composée d'entiers! Cependant, pour une classe très importante d'équations appelées courbes elliptiques de genre un, la conjecture de Birch Swinnerton-Dyer dit que la taille du groupe de solutions rationnelles dépend du comportement près de $s = 1$ d'une généralisation de la fonction $\zeta(s)$ associée à la courbe.

Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes gouvernent la mécanique des fluides, qui joue un rôle crucial dans un très grand nombre de phénomènes allant du contrôle des turbulences aérodynamiques aux prévisions de la météorologie.

Bien que ces équations datent du XIX^e siècle, notre compréhension de leurs solutions reste minime. Le problème est de décider si ces équations admettent des solutions et d'obtenir une théorie mathématique rigoureuse qui permette d'expliquer et de prédire le comportement des solutions des équations de Navier-Stokes.

Équations de Yang-Mills

Les lois de la physique quantique jouent aux échelles microscopiques un rôle analogue à celui des lois de Newton, qui régissent la mécanique classique du monde macroscopique.

Il y a près d'un demi-siècle, deux physiciens Yang et Mills ont découvert une relation étonnante entre la physique des particules élémentaires et la géométrie des espaces fibrés. Ils ont obtenu une équation fondamentale qui porte le nom d'équation de Yang-Mills et dont on vérifie quotidiennement les prédictions expérimentales dans les accélérateurs de particules du monde entier, comme à Brookhaven, à Stanford, au CERN, ou à Tsukuba. Cependant, il n'y a aucune preuve mathématique de l'existence des champs quantiques gouvernés par les équations de Yang-Mills et la question, essentielle pour la physique, du confinement des quarks est un problème d'une difficulté mathématique considérable. La solution de ce problème nécessitera sans doute l'introduction d'idées nouvelles aussi bien du point de vue des mathématiques que de celui de la physique et devrait permettre de lever le voile sur un des grands mystères du monde microscopique.