

PROBLÈMES DU MILLÉNAIRE

Le problème *P* versus *NP*

C'est samedi soir et vous arrivez dans une soirée au milieu de nombreux invités. Timide, vous vous demandez combien de personnes vous connaissez déjà dans la pièce. Votre hôte vous informe que vous devez certainement connaître Julie, la femme qui se trouve à côté de la table du fond. En une fraction de seconde, vous pouvez jeter un coup d'œil et vérifier si votre hôte a raison. En revanche, si votre hôte ne vous dit rien, vous serez dans l'obligation de faire le tour de la pièce et d'aller voir chaque personne une par une. Voici l'exemple type du phénomène montrant que chercher une solution prend souvent plus de temps que de vérifier l'exactitude d'une solution.

De même, trouver un diviseur de 13 717 421 prend beaucoup plus de temps que de vérifier que ce nombre est égal à 3 607 fois 3 803. Les mathématiciens ont isolé une classe de problèmes qui peuvent être résolus en un temps efficace : les problèmes à temps polynomial. Le problème *P* versus *NP*, formulé par Stephen Cook en 1971, demande si une solution qui peut être vérifiée en un temps polynomial peut également être trouvée en un temps polynomial.

L'hypothèse de Riemann

Certains nombres entiers ont la particularité de ne pas pouvoir être exprimés comme le produit de deux nombres entiers plus petits qu'eux mêmes (par exemple : 2, 3, 5, 7, ... 53, ..., 1 999, ... etc.). Ils sont appelés nombres premiers et jouent un rôle très important dans les mathématiques fondamentales et leurs applications (comme la cryptographie). Bien qu'elle ne semble pas obéir à une règle, la répartition des nombres premiers parmi les entiers est étroitement liée au comportement d'une fonction « $\zeta(s)$ » (lire «dzéta de s») découverte par Euler. L'hypothèse de Riemann affirme que les solutions intéressantes de l'équation $\zeta(s) = 0$ se situent sur une droite. L'hypothèse de Riemann a été vérifiée numériquement pour les 1 500 000 000 premières solutions. Elle contient la clef des mystères entourant la distribution des nombres premiers.

La conjecture de Poincaré

Traçons une courbe fermée (mais qui ne se recoupe pas) à la surface d'un ballon (sphère). Si l'on découpe le ballon le long de cette courbe, on obtient deux morceaux différents. Cependant, cela n'est pas toujours le cas pour des surfaces un peu plus compliquées, comme une chambre à air de vélo (surface appelée «tore» par les mathématiciens). On dit que la sphère est simplement connexe (alors que le tore ne l'est pas). Il est facile de démontrer que toute surface simplement connexe qui est finie (que l'on peut enfermer dans une boîte) et sans bord, est nécessairement la surface d'un objet sphérique. Poincaré a conjecturé qu'une telle caractérisation des objets sphériques continue à être vraie si l'on passe des surfaces à deux dimensions aux espaces à trois dimensions.

Cette question s'est révélée extrêmement difficile et résiste depuis un siècle aux efforts des mathématiciens.

La conjecture de Hodge

Au XX^e siècle, les mathématiciens ont découvert des façons efficaces de décrire la géométrie des objets complexes. L'idée de base est de se demander comment reconstituer la forme d'un objet complexe en assemblant des formes géométriques simples de dimension croissante. Cette technique s'est révélée si puissante qu'elle a permis de créer une multitude d'outils

appelés théories de cohomologie. Grâce à ces théories, les mathématiciens ont effectué d'énormes progrès dans la classification des objets mathématiques. Malheureusement, les origines géométriques de la théorie ont disparu, au fur et à mesure qu'il est devenu nécessaire d'ajouter des éléments qui n'ont plus rien à voir avec la géométrie. La conjecture de Hodge suggère que, pour certains types d'espaces «élégants» (définis par des équations algébriques), les éléments appelés cycles de Hodge peuvent être interprétés comme une combinaison de formes géométriques d'origine algébrique.

La conjecture de Birch Swinnerton-Dyer

Les mathématiciens ont toujours été fascinés par le problème consistant à trouver des solutions aux équations algébriques comme : $x^2 + y^2 = z^2$.

La question de base est de chercher des solutions où x , y , et z sont des nombres entiers. Pour l'équation ci-dessus, on sait depuis Euclide décrire toutes les solutions, mais, pour des polynômes plus compliqués, cela devient extrêmement difficile. En fait, Yu Matijasevich a montré en 1970 que le dixième problème d'Hilbert a une réponse négative, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de méthode générale pour savoir si une telle équation a une solution composée d'entiers! Cependant, pour une classe très importante d'équations appelées courbes elliptiques de genre un, la conjecture de Birch Swinnerton-Dyer dit que la taille du groupe de solutions rationnelles dépend du comportement près de $s = 1$ d'une généralisation de la fonction $\zeta(s)$ associée à la courbe.

Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes gouvernent la mécanique des fluides, qui joue un rôle crucial dans un très grand nombre de phénomènes allant du contrôle des turbulences aérodynamiques aux prévisions de la météorologie.

Bien que ces équations datent du XIX^e siècle, notre compréhension de leurs solutions reste minime. Le problème est de décider si ces équations admettent des solutions et d'obtenir une théorie mathématique rigoureuse qui permette d'expliquer et de prédire le comportement des solutions des équations de Navier-Stokes.

Équations de Yang-Mills

Les lois de la physique quantique jouent aux échelles microscopiques un rôle analogue à celui des lois de Newton, qui régissent la mécanique classique du monde macroscopique.

Il y a près d'un demi-siècle, deux physiciens Yang et Mills ont découvert une relation étonnante entre la physique des particules élémentaires et la géométrie des espaces fibrés. Ils ont obtenu une équation fondamentale qui porte le nom d'équation de Yang-Mills et dont on vérifie quotidiennement les prédictions expérimentales dans les accélérateurs de particules du monde entier, comme à Brookhaven, à Stanford, au CERN, ou à Tsukuba. Cependant, il n'y a aucune preuve mathématique de l'existence des champs quantiques gouvernés par les équations de Yang-Mills et la question, essentielle pour la physique, du confinement des quarks est un problème d'une difficulté mathématique considérable. La solution de ce problème nécessitera sans doute l'introduction d'idées nouvelles aussi bien du point de vue des mathématiques que de celui de la physique et devrait permettre de lever le voile sur un des grands mystères du monde microscopique.