

La stratégie de P4 est similaire : comme il a besoin de la moitié des voix, il doit avantager un de ses compagnons. Le pot-de-vin minimal qu'il peut donner est une pièce d'or, qu'il offre à P2, car celui-ci n'aura rien si la proposition de P4 est rejetée et celle de P3 acceptée. P4 propose donc 99 pièces pour lui, rien pour P3, une pièce pour P2 et rien pour P1.

P5 doit raisonner de la même façon, mais il doit circonvier deux de ses compagnons. Le pot-de-vin minimal qu'il peut donner est deux pièces d'or. Il doit proposer 98 pièces pour lui, aucune pour P4 et P2, une pour P3 et P1.

L'analyse continue ainsi, chaque proposition visant à assurer à son auteur un vote favorable et un gain maximal. Finalement, P10 propose 96 pièces pour lui, une pour P8, P6, P4 et P2, aucune pour les pirates de chiffres impairs. Cette répartition résout le problème à dix pirates.

S Omohundro a étudié le problème avec un nombre de pirates supérieur et, notamment, il propose d'examiner le cas de 500 pirates qui se partagent 100 pièces d'or.

Le raisonnement précédent reste valable jusqu'à ce que le nombre de pirates soit égal à 200 : P200 n'offre rien aux pirates de nombre impair et il donne une pièce à chaque pirate de nombre pair, lui inclus. Puis la poursuite du raisonnement semble impossible, car P201 n'a plus de pots-de-vin à donner. Comme il a intérêt à ne pas être jeté par-dessus bord, il peut proposer de ne rien garder pour lui et de donner une pièce d'or à chaque pirate de nombre impair entre P1 et P199.

P202 non plus ne peut rien garder : il doit utiliser les 100 pièces d'or pour acheter 100 pirates, parmi ceux qui n'obtiendraient rien de la proposition de P201. Comme 101 pirates sont dans cette situation, la proposition de P202 n'est plus déterminée de façon unique : il a le choix entre 101 façons de distribuer les pots-de-vin. La figure 2 montre les 101 pirates qui *pourraient* retirer quelque chose de la proposition de P202 et les 101 autres qui seraient certains de ne rien recevoir.

P203 doit obtenir 102 votes favorables, le sien inclus, et n'a pas assez de pièces pour acheter 101 compagnons : il passe par-dessus bord, quelle que soit sa proposition. Pourtant, P203 joue un rôle important, car P204 sait que P203 voudra éviter de proposer une division du butin ; il peut donc compter sur la voix de P203, quelle que soit sa proposition. Ainsi, P204 est sauvé : avec sa propre voix, celle de P203, plus 100 voix achetées, il obtient 102 votes favorables, soit les 50 pour cent requis. Les bénéficiaires

BÉNÉFICIAIRE POSSIBLE D'UNE PIÈCE D'OR

202 PIRATES

P1	P2	P3	P4		P197	P198	P199	P200	P201	P202
NON	OUI	NON	OUI		NON	OUI	NON	OUI	OUI	NON

204 PIRATES

P1	P2	P3	P4		P197	P198	P199	P200	P201	P202	P203	P204
OUI	NON	OUI	NON		OUI	NON	OUI	NON	NON	OUI	NON	NON

2. Dans de plus grands groupes, les pirates les plus féroces doivent acheter 100 de leurs compagnons avec une pièce d'or chacun.

des pots-de-vin sont parmi les 100 pirates qui n'obtiendraient rien de la proposition de P202.

Le pirate P205 ne peut compter sur les voix de P203 ou P204 : s'ils votent contre lui, ils auront le plaisir de le jeter par-dessus bord et pourront encore se sauver eux-mêmes. P205 est donc jeté à la mer quoi qu'il propose ; P206 subit le même sort, car même la voix de P205 ne lui suffit pas. Quant à P207, il a besoin de 104 voix : la sienne, 100 achetées et trois autres. N'ayant que celles de P205 et P206, il passe aussi à la planche.

P208 a plus de chance : il a aussi besoin de 104 voix, mais P205, P206 et P207 votent pour lui ! Avec sa propre voix et les 100 achetées, il est sauvé. Reçoivent des pièces d'or 100 pirates parmi ceux qui n'auraient rien obtenu de la proposition de P204 : les pirates de nombres pairs entre P2 et P200, ainsi que P201, P203 et P204.

Ainsi apparaît un nouveau type de raisonnement qui reste valide indéfiniment. Les pirates pouvant faire des propositions gagnantes (en ne gardant rien et en achetant 100 compagnons) sont séparés par des séquences toujours plus longues de pirates jetés par-dessus bord à coup sûr, dont les voix vont à toute

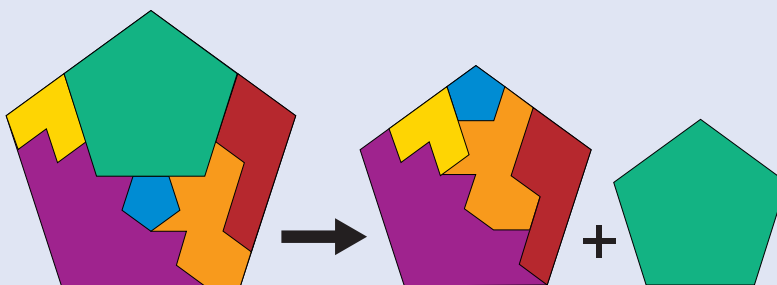
proposition d'un pirate plus féroce qu'eux. Les pirates qui peuvent faire des propositions gagnantes sont P201, P202, P204, P208, P216, P232, P264, P328 et P456... On observe qu'ils ont pour numéro un nombre égal à 200 plus une puissance de deux.

Quels pirates sont-ils les heureux bénéficiaires des pots-de-vin ? Nous avons vu que la solution n'est pas unique, mais P201 peut les offrir aux pirates de numéro impair entre P1 et P199, P202 aux pirates de numéro pair entre P2 et P200, P204 aux pirates de numéro impair, P208 aux pirates de numéro pair, et ainsi de suite.

Résolvons finalement le problème à 500 pirates : les 44 premiers sont jetés par-dessus bord, puis P456 offre une pièce d'or à chaque pirate de nombre impair entre P1 et P199. Grâce à leur système démocratique, les pirates ont arrangé leurs affaires de sorte que les plus féroces passent par-dessus bord, ou s'estiment heureux d'échapper à la mort au prix d'une part nulle du butin. Seuls les 200 pirates les plus doux ont une chance d'obtenir quelque chose, la moitié seulement de ceux-ci recevant une pièce d'or : « Heureux les débonnaires, car ils hériteront la terre ! » (Matthieu, 5, 5.)

Réactions

En réponse à mon article *Dissections et métamorphoses* (Pour la Science, janvier 1998), Gil Lamb m'a envoyé d'Andorre la dissection d'un pentagone (ci-dessous) qui fournit une ingénieuse preuve de la relation pythagoricienne $3^2 + 4^2 = 5^2$. Les nombres représentent les longueurs des côtés des pentagones ; leurs carrés sont proportionnels aux aires des figures.





La musique en images

CHRISTOPH PÖPPE

Comment former des images à partir des sons.

Comment Transformer les sons en images ? La recherche d'une telle opération est utile : un coup d'œil suffirait pour savoir si une émission sonore est intentionnelle ou aléatoire. Gordon Monro, à l'Université de Sydney, et Jeff Pressing, à l'Institut de psychologie de Melbourne, explorent ce type de visualisations.

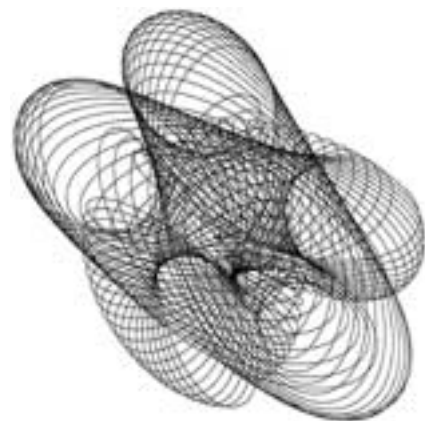
Ils ont notamment utilisé les données fournies par les systèmes d'enregistrement de disques compacts : environ 44 000 fois par seconde, la tension électrique formée à partir du son, dans le microphone, est mémorisée ; on transforme ainsi un signal continu en une suite de valeurs, qui sont stockées sous forme codée sur les disques compacts.

Désignons ces valeurs par $s_1, s_2, s_3, \dots$ et portons dans un plan muni d'un repère les points (s_i, s_{i+1}) . Normalement, on utilise les repères cartésiens pour représenter les fonctions : aux variables x de l'axe des abscisses, les fonctions associent des valeurs y repérées sur l'axe des ordonnées. Dans l'étude du son, on ne cherche pas si une fonction f associe chaque valeur à la précédente ($s_{i+1} = f(s_i)$), mais on construit un graphe en portant des points d'abscisse s_i et d'ordonnée s_{i+1} dans un plan comme si une telle fonction existait. Ce mode de représentation

fait ainsi apparaître d'éventuelles relations (des «corrélations») entre une valeur et celle qui la précède immédiatement, autrement dit entre la suite des valeurs et une version d'elle-même décalée dans le temps, d'où le nom de «diagramme d'autocorrélation» pour l'image que forment les innombrables points qui décrivent un signal sonore.

Quelle image obtient-on par ce procédé ? Sans précautions particulières, l'image semble insignifiante, car, avec une fréquence d'échantillonnage de 44 000 par seconde, deux valeurs successives sont si proches que rien n'apparaît : les valeurs s_i et s_{i+1} sont quasi identiques, et la représentation graphique correspondante est très proche de la droite $x = y$, la bissectrice du premier quadrant.

L'image devient plus intéressante quand on utilise un écart supérieur entre les valeurs représentées, tout en conservant tous les points de l'échantillonnage : on porte par exemple les points (s_i, s_{i+10}) au lieu des points (s_i, s_{i+1}) . D'ailleurs, au lieu de 10, on peut choisir n'importe quel écart de temps k afin d'obtenir une image aussi instructive que possible. Avec un pas k égal à 10 et un son de fréquence égale à 1 000 hertz (ce qui correspond à une note aiguë de soprano), les deux valeurs à représenter



1. Image d'un accord de trois sons purs : do, sol et mi.

sont espacées d'un quart de période environ, ce qui est optimal.

Pour une oscillation sinusoïdale, l'image ainsi obtenue est une ellipse (lorsque l'écart de temps est exactement d'un quart de période, c'est même un cercle). D'autre part, tout signal périodique peut être décrit comme une somme de sinusôides de fréquences multiples de la fréquence minimale, dite fondamentale. Lorsque la première oscillation harmonique (une octave au-dessus du son fondamental, c'est-à-dire à une fréquence double de celle du fondamental) s'ajoute au fondamental avec une intensité inférieure, l'ellipse se déforme jusqu'à former des nœuds (voir l'encadré ci-contre). Sur l'image, un déphasage entre les deux oscillations apparaît alors qu'il est inaudible. Des harmoniques supérieures engendrent de remarquables motifs en forme de fleurs, lorsque l'on choisit un écart de temps approprié, et un accord à trois notes donne une courbe compliquée (voir la figure 1). Un son de flûte aigu et très fort donne un champ gris avec une structure à peine reconnaissable (voir la figure 3).

Dans quelles conditions les points forment-ils des courbes reconnaissables ? Supposons qu'existe réellement une fonction f qui corresponde à la relation $s_{i+1} = f(s_i)$. Si seule la première valeur s_1 de la suite est fixée, toutes les autres valeurs seraient déterminées par la fonction f : $s_2 = f(s_1)$, $s_3 = f(s_2)$, $s_4 = f(s_3)$, etc. La fonction f est ce que l'on nomme une fonction d'itération, et le système dyna-

Images d'autocorrélation obtenues pour des superpositions d'oscillations sinusoïdales pures. À gauche, les images sont celles que l'on obtient pour une note sinusoïdale pure à laquelle on a ajouté la note à l'octave supérieure, deux fois moins intense ; les deux courbes ne diffèrent que par le déphasage des deux notes. À droite, l'image est celle d'une note sinusoïdale avec plusieurs harmoniques (le nombre m indique le rapport entre les fréquences de l'oscillation harmonique et de l'oscillation de base). Les écarts de temps (α indique l'écart en fraction de période) sont choisis de façon à obtenir une image la plus symétrique possible.

