



Paradoxes perdus et retrouvés

IAN STEWART

Une analyse logique attentive élimine bien des paradoxes. Ceux qui subsistent révèlent les mécanismes de la pensée.

Les paradoxes logiques sont parmi les problèmes mathématiques les plus troublants. Les plus difficiles d'entre eux sont les énoncés auto-contradictaires, dont le plus connu est : « Cette phrase est fausse ». Pour les analyser, le logicien doit chercher le sens précis des mots. Certains paradoxes qui résistent à un examen sévère montrent les limites de la pensée logique ; d'autres cèdent facilement.

Dans cet article, je vous propose d'examiner quelques paradoxes de ces

deux catégories, avec une appréciation toute personnelle de leur intérêt.

Protagoras, philosophe grec, qui enseignait le droit au ^ve siècle avant notre ère, accepta qu'un de ses élèves ne paie ses leçons qu'après sa première plaidoirie gagnée. Or celui-ci n'eut aucun client et Protagoras menaça de le poursuivre, pensant gagner le procès dans tous les cas : l'élève devait payer si la cour donnait raison à Protagoras, et il devait également payer si elle lui donnait tort, car le jeune homme

aurait alors gagné son premier procès. Cependant, l'élève fit le raisonnement opposé : si Protagoras gagne, l'accord passé stipule qu'aucune somme n'est due, aucun procès n'ayant été gagné par l'élève ; et si Protagoras perd, c'est la cour qui décide qu'aucun argent ne doit lui être versé.

Ces raisonnements amusants sont incohérents : ils soutiennent que l'accord de Protagoras et de son élève est valide pendant une moitié de leur raisonnement, mais ils admettent que la cour est une instance supérieure, au cours de l'autre moitié du raisonnement.

La véritable question est : pourquoi la cour est-elle sollicitée ? Parce qu'elle doit lever les ambiguïtés du contrat et, éventuellement, se substituer à lui : si la cour donne raison à Protagoras, l'élève doit payer parce que la cour en a décidé ainsi ; et, si la cour donne raison à l'élève, celui n'est pas tenu de payer, parce que la cour l'a décidé. Laminé par la logique, le paradoxe s'évanouit : c'est un exemple de « paradoxe perdu ».

Analysons maintenant un paradoxe autrement intéressant, qui fut présenté par le logicien français Jules-Antoine Richard. En français, seules certaines phrases définissent des nombres entiers positifs : « L'année de la Révolution française » définit l'entier 1789, tandis que « La Déclaration des droits de l'homme a une grande importance historique » ne définit aucun nombre. Considérons l'expression : « Le plus petit entier positif que l'on ne peut pas définir par une phrase en français de moins de 23 mots ». Quel que soit ce nombre indéfinissable en moins de 23 mots, nous venons précisément de le définir en 22 mots : paradoxe !

Analysons le problème. On éviterait le paradoxe si la proposition considérée ne définissait pas de nombre entier : elle ne serait alors pas autocontradictoire, et le paradoxe disparaîtrait. Étu-

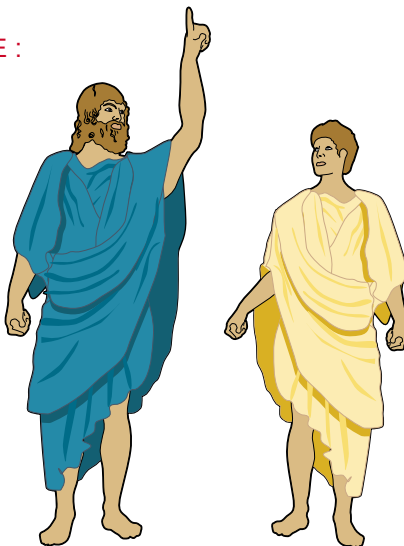
LE PARADOXE DE PROTAGORAS

LE PROBLÈME :

Le philosophe grec Protagoras donna des leçons de droit à un élève et accepta que celui-ci ne le paie qu'après son premier procès gagné. Cependant, l'élève n'eut aucun client et Protagoras lui intenta un procès.

LE PARADOXE :

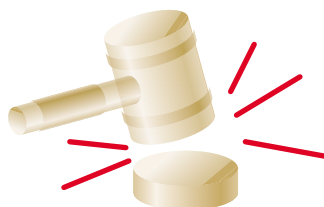
Protagoras pensait qu'il gagnerait dans tous les cas, car :
 ¥ Si la cour lui donne raison, son élève sera tenu de le payer.
 ¥ Si la cour donne raison son élève, celui-ci devra le payer, car il aura gagné son premier procès.



L'élève était certain de gagner dans tous les cas, car :
 ¥ Si la cour lui donne raison, il n'aura rien à payer.
 ¥ Si elle donne raison à Protagoras, il ne sera pas tenu de le payer, n'ayant pas encore gagné un seul procès.

LA SOLUTION :

La cour doit invalider le contrat si nécessaire. Il s'ensuit que les deux secondes parties des raisonnements, de Protagoras comme de son élève, sont incorrectes.



LE PARADOXE DU CONTRÔLE SURPRISE

LE PROBLÈME :

Un professeur annonce à ses élèves qu'il y aura un contrôle surprise la semaine suivante (du lundi au vendredi).



LE PARADOXE :

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

Si, le jeudi soir, le contrôle n'a toujours pas eu lieu, les élèves savent qu'il sera le vendredi. Ce ne sera donc pas un contrôle surprise.

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

Le vendredi étant exclu, si le contrôle n'a pas eu lieu le mercredi soir, il se déroulera assurément le jeudi. De nouveau, ce n'est plus une surprise.

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

En raisonnant de la même façon, les étudiants éliminent successivement le mercredi, le mardi et le lundi comme date surprise. Un contrôle surprise est donc impossible.

LA RÉOLUTION :

LUNDI	MARDI	MERCREDI
Les élèves : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui."	Les élèves : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui."	Les élèves : "Le contrôles aura lieu aujourd'hui." Le professeur : "Oui, en effet."

L'argumentation des étudiants est logiquement équivalente au fait d'annoncer chaque matin : «Le contrôle aura lieu aujourd'hui.» Comme ils s'attendent chaque jour à ce que le contrôle ait lieu, ce dernier ne saurait les surprendre.

dions donc l'existence de cet hypothétique entier, le plus petit qui ne puisse être défini par une phrase de moins de 23 mots.

La langue française ne comportant qu'un nombre fini de mots, le nombre fini de phrases de moins de 23 mots est également fini. Supposons que la langue française comporte 99 999 mots. On compterait alors 99 999²³ phrases ayant exactement 23 mots et 100 000²³ phrases de moins de 23 mots : une phrase à 15 mots, par exemple, comporte 15 mots et 8 absences de mots ; l'absence de mot correspond à l'unité qui fait passer de 99 999 à 100 000. Beaucoup de ces phrases n'ont aucun sens et, parmi celles qui en ont, seules certaines définissent un nombre entier. Ces dernières sont donc associées à un ensemble fini d'entiers positifs, dont le complémentaire, d'après un théorème classique de mathématiques, possède un plus petit élément. Autrement dit, le plus petit nombre entier positif, défini par une phrase de moins de 23 mots, existe et il est unique.

Comment éviter le paradoxe ? On pourrait d'abord se méfier des phrases qui semblent définir un nombre et qui, en réalité, ne le font pas. Par exemple, l'expression «Un nombre tel que son produit par 0 donne 0» ne semble pas différer beaucoup de la phrase de Richard, mais elle n'est pas une bonne définition d'un nombre, parce qu'elle est vérifiée par tous les nombres entiers. Toutefois la phrase de Richard n'est pas de ce type, car c'est une bonne définition : le concept de «plus petit entier tel que» assure l'unicité dès qu'il y a l'existence. Observons que la phrase

«Le plus petit entier positif que l'on ne peut pas définir par une phrase en français de moins de 21 mots» ne pose aucun problème. Le paradoxe de Richard montre les limites de la langue pour la description de l'arithmétique. Ne pouvant lever ce paradoxe malgré un examen approfondi, je le nomme «paradoxe retrouvé».

Appliquons maintenant ces notions de paradoxes perdus et retrouvés à l'exemple du contrôle surprise. Un professeur annonce à ses élèves qu'il fera un contrôle la semaine suivante (entre le lundi et le vendredi). Il mentionne que le jour exact du contrôle ne sera pas dévoilé : il peut choisir n'importe quel jour de la semaine.

Les élèves font cependant le raisonnement suivant : si le professeur choisit de faire le contrôle surprise le vendredi, alors, dès la fin des cours du jeudi, le contrôle n'ayant pas encore eu lieu, les élèves sauront que le contrôle aura lieu le vendredi et ce ne sera plus une surprise. Par conséquent, le contrôle n'aura pas lieu le vendredi. Peut-il avoir lieu le jeudi ? S'il n'a pas été fait avant la fin du mercredi, les élèves sauront que le contrôle aura lieu le jeudi ; donc le contrôle n'aura pas lieu le jeudi. En remontant ainsi, les élèves concluent que le contrôle n'aura pas non plus lieu le mercredi, ni le mardi ni le lundi. Ainsi, le professeur ne peut donner de contrôle surprise.

Pourtant, si le professeur choisit le mercredi, par exemple, comment les élèves sauraient-ils qu'ils auront un contrôle ce jour-là ? Un paradoxe se présente : est-ce un paradoxe perdu ou un paradoxe retrouvé ?

Reformulons le problème de façon logiquement équivalente. Supposons que, chaque matin, les élèves annoncent d'un ton assuré : «Le contrôle aura lieu aujourd'hui.» Ils finiront évidemment par dire le jour du contrôle, de sorte qu'il n'y aura pas de surprise. Plus généralement, si, chaque jour, vous vous attendez à une surprise, la surprise n'en est plus une. J'en ai discuté avec beaucoup de collègues mathématiciens et je pense que ce paradoxe du contrôle inclut la même idée, un peu «habillée».

Ajoutons deux remarques. D'une part, ce paradoxe est fondé sur l'usage ambigu du mot «surprise». D'autre part, quel que soit le sens raisonnable que l'on donne à cette idée de «surprise», il y a deux façons équivalentes d'envisager la stratégie prédictive des élèves. La première est la façon précédente, qui conduit au paradoxe. La seconde décrit le problème en termes d'actions effectives et non d'hypothèses subjectives, ce qui élimine l'aspect paradoxal.

Ajoutons, en effet, une autre condition au paradoxe du contrôle surprise : supposons que les élèves aient de si mauvaises mémoires que, quelles que soient les révisions qu'ils fassent un soir, ils les oublient le soir suivant. Même s'ils affirment que la date du contrôle n'est pas une surprise, ils devront travailler jusqu'au soir précédant le contrôle : s'ils ne travaillent pas dimanche soir et que le contrôle est lundi, ils échoueront, et il en sera de même pour tous les autres soirs et lendemains. Bien qu'ils disent ne jamais pouvoir être surpris, ils doivent réviser tous les soirs jusqu'à l'examen.

Je conclus que le paradoxe du contrôle surprise est un paradoxe perdu.