

LE PARADOXE DU CONTRÔLE SURPRISE

LE PROBLÈME :

Un professeur annonce à ses élèves qu'il y aura un contrôle surprise la semaine suivante (du lundi au vendredi).



LE PARADOXE :

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

Si, le jeudi soir, le contrôle n'a toujours pas eu lieu, les élèves savent qu'il sera le vendredi. Ce ne sera donc pas un contrôle surprise.

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

Le vendredi étant exclu, si le contrôle n'a pas eu lieu le mercredi soir, il se déroulera assurément le jeudi. De nouveau, ce n'est plus une surprise.

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

En raisonnant de la même façon, les étudiants éliminent successivement le mercredi, le mardi et le lundi comme date surprise. Un contrôle surprise est donc impossible.

LA RÉOLUTION :

LUNDI	MARDI	MERCREDI
Les élèves : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui."	Les élèves : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui."	Les élèves : "Le contrôles aura lieu aujourd'hui." Le professeur : "Oui, en effet."

L'argumentation des étudiants est logiquement équivalente au fait d'annoncer chaque matin : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui." Comme ils s'attendent chaque jour à ce que le contrôle ait lieu, ce dernier ne saurait les surprendre.

dions donc l'existence de cet hypothétique entier, le plus petit qui ne puisse être défini par une phrase de moins de 23 mots.

La langue française ne comportant qu'un nombre fini de mots, le nombre fini de phrases de moins de 23 mots est également fini. Supposons que la langue française comporte 99 999 mots. On compterait alors 99 999²³ phrases ayant exactement 23 mots et 100 000²³ phrases de moins de 23 mots : une phrase à 15 mots, par exemple, comporte 15 mots et 8 absences de mots ; l'absence de mot correspond à l'unité qui fait passer de 99 999 à 100 000. Beaucoup de ces phrases n'ont aucun sens et, parmi celles qui en ont, seules certaines définissent un nombre entier. Ces dernières sont donc associées à un ensemble fini d'entiers positifs, dont le complémentaire, d'après un théorème classique de mathématiques, possède un plus petit élément. Autrement dit, le plus petit nombre entier positif, défini par une phrase de moins de 23 mots, existe et il est unique.

Comment éviter le paradoxe ? On pourrait d'abord se méfier des phrases qui semblent définir un nombre et qui, en réalité, ne le font pas. Par exemple, l'expression «Un nombre tel que son produit par 0 donne 0» ne semble pas différer beaucoup de la phrase de Richard, mais elle n'est pas une bonne définition d'un nombre, parce qu'elle est vérifiée par tous les nombres entiers. Toutefois la phrase de Richard n'est pas de ce type, car c'est une bonne définition : le concept de «plus petit entier tel que» assure l'unicité dès qu'il y a l'existence. Observons que la phrase

«Le plus petit entier positif que l'on ne peut pas définir par une phrase en français de moins de 21 mots» ne pose aucun problème. Le paradoxe de Richard montre les limites de la langue pour la description de l'arithmétique. Ne pouvant lever ce paradoxe malgré un examen approfondi, je le nomme «paradoxe retrouvé».

Appliquons maintenant ces notions de paradoxes perdus et retrouvés à l'exemple du contrôle surprise. Un professeur annonce à ses élèves qu'il fera un contrôle la semaine suivante (entre le lundi et le vendredi). Il mentionne que le jour exact du contrôle ne sera pas dévoilé : il peut choisir n'importe quel jour de la semaine.

Les élèves font cependant le raisonnement suivant : si le professeur choisit de faire le contrôle surprise le vendredi, alors, dès la fin des cours du jeudi, le contrôle n'ayant pas encore eu lieu, les élèves sauront que le contrôle aura lieu le vendredi et ce ne sera plus une surprise. Par conséquent, le contrôle n'aura pas lieu le vendredi. Peut-il avoir lieu le jeudi ? S'il n'a pas été fait avant la fin du mercredi, les élèves sauront que le contrôle aura lieu le jeudi ; donc le contrôle n'aura pas lieu le jeudi. En remontant ainsi, les élèves concluent que le contrôle n'aura pas non plus lieu le mercredi, ni le mardi ni le lundi. Ainsi, le professeur ne peut donner de contrôle surprise.

Pourtant, si le professeur choisit le mercredi, par exemple, comment les élèves sauraient-ils qu'ils auront un contrôle ce jour-là ? Un paradoxe se présente : est-ce un paradoxe perdu ou un paradoxe retrouvé ?

Reformulons le problème de façon logiquement équivalente. Supposons que, chaque matin, les élèves annoncent d'un ton assuré : «Le contrôle aura lieu aujourd'hui.» Ils finiront évidemment par dire le jour du contrôle, de sorte qu'il n'y aura pas de surprise. Plus généralement, si, chaque jour, vous vous attendez à une surprise, la surprise n'en est plus une. J'en ai discuté avec beaucoup de collègues mathématiciens et je pense que ce paradoxe du contrôle inclut la même idée, un peu «habillée».

Ajoutons deux remarques. D'une part, ce paradoxe est fondé sur l'usage ambigu du mot «surprise». D'autre part, quel que soit le sens raisonnable que l'on donne à cette idée de «surprise», il y a deux façons équivalentes d'envisager la stratégie prédictive des élèves. La première est la façon précédente, qui conduit au paradoxe. La seconde décrit le problème en termes d'actions effectives et non d'hypothèses subjectives, ce qui élimine l'aspect paradoxal.

Ajoutons, en effet, une autre condition au paradoxe du contrôle surprise : supposons que les élèves aient de si mauvaises mémoires que, quelles que soient les révisions qu'ils fassent un soir, ils les oublient le soir suivant. Même s'ils affirment que la date du contrôle n'est pas une surprise, ils devront travailler jusqu'au soir précédant le contrôle : s'ils ne travaillent pas dimanche soir et que le contrôle est lundi, ils échoueront, et il en sera de même pour tous les autres soirs et lendemains. Bien qu'ils disent ne jamais pouvoir être surpris, ils doivent réviser tous les soirs jusqu'à l'examen.

Je conclus que le paradoxe du contrôle surprise est un paradoxe perdu.

Matière à penser

ROLAND LEHOUCQ • MICHEL CASSÉ

Grâce à une enquête longue et minutieuse, les physiciens savent que les éléments viennent des étoiles et que leur répartition traduit des mécanismes de physique nucléaire.

En 1610, lorsqu'il pointe sa lunette vers la Lune, Galilée voit des montagnes et l'astronome en déduit que la Lune est «terreuse». Aujourd'hui, nous serions plutôt enclins à dire que la Terre est céleste, car les éléments qui la composent viennent du ciel. De l'hydrogène à l'uranium, les sources des éléments chimiques sont maintenant bien connues.

Les noyaux sont constitués de protons, chargés positivement, et de neutrons, de masse analogue à celle du proton, mais sans charge. Quelles sont, parmi les combinaisons de ces nucléons, celles qui forment des noyaux stables au regard de l'âge de l'Univers? Dans un diagramme où l'on représente le nombre de neutrons N en fonction du nombre de protons Z , les 270 noyaux stables que dénombre la physique nucléaire sont au fond d'une sorte de vallée, la «vallée de stabilité» (plus l'énergie de liaison du noyau est grande, plus sa position dans la vallée est profonde) ; les noyaux instables occupent les flancs des «collines» qui la bordent. Les isotopes d'un élément sont les noyaux qui ont le même nombre de protons, mais un nombre différent de neutrons (leurs propriétés chimiques sont identiques, mais leurs propriétés nucléaires diffèrent). Ils sont situés sur une même verticale.

Porteurs d'une charge positive, les protons se repoussent. Pourquoi sont-ils liés dans le noyau? Parce qu'ils subissent une force attractive, d'intensité supérieure à courte distance à celle de la force électrostatique. Cette force est indépendante de la charge électrique et son rayon d'action est très faible, de l'ordre de 10^{-15} mètre. En raison de cette attraction, la masse d'un noyau est toujours inférieure à la somme des

masses de ses $N+Z$ nucléons : la différence entre la somme des masses des constituants isolés et la masse du noyau est son énergie de liaison ; c'est l'énergie qu'il faut lui fournir pour en libérer les nucléons.

La force nucléaire entre un proton et un neutron est

plus intense qu'entre nucléons du même type, deux neutrons par exemple. Pour cette raison, un noyau qui comporte autant de protons que de neutrons est plus stable.

C'est ce que l'on observe pour les noyaux plus légers, comme le calcium (20 protons et 20 neutrons). Cependant, la taille du noyau est finie, de sorte que les nucléons situés près de la surface extérieure sont moins entourés, et donc moins liés, que ceux de l'intérieur. La résultante des forces d'interaction sur les nucléons superficiels, dirigée vers l'intérieur du noyau, crée une tension superficielle analogue à celle qui existe à la surface d'une goutte de liquide. L'énergie de liaison s'en trouve diminuée d'une quantité pro-

portionnelle à l'aire de la surface externe du noyau. Dans ce modèle, dit de la goutte liquide, plus un noyau est gros, plus son énergie de liaison est diminuée.

D'autres facteurs diminuent l'énergie de liaison. Bien que liés par la force nucléaire, les protons se repoussent sous l'effet de la force électrostatique. Les noyaux stables les plus lourds doivent avoir un excès de neutrons afin de compenser la répulsion entre les protons. Par exemple, le noyau de plomb possède 82 protons et 126 neutrons. Pour les noyaux les plus lourds, la répulsion électrostatique entre protons devient si forte qu'aucun noyau n'est stable au-delà du bismuth (83 protons). C'est dans cette région que l'on trouve la plupart des noyaux radioactifs naturels.

L'examen détaillé de la vallée de stabilité met aussi en lumière d'autres traits de la structure nucléaire. Ainsi, les noyaux qui ont un nombre pair de protons et de neutrons, ainsi que ceux qui contiennent un nombre entier de noyaux d'hélium (deux protons et deux neutrons) ont une énergie de liaison plus élevée que leurs voisins. Selon la mécanique quantique, les nucléons occupent des états déterminés, regroupés en couches. Un noyau est plus stable lorsqu'il possède suffisamment de protons ou de neutrons pour remplir une couche. C'est le cas de ces noyaux.

Au total, la cohésion des noyaux résulte d'un jeu subtil entre la répulsion

