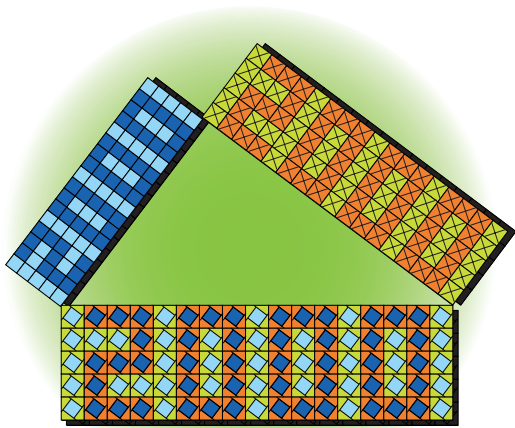
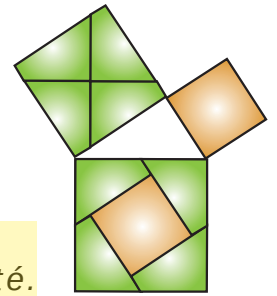




La mise en pièces d'un carré

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le carré : énigmes anciennes et nouvelles pour vous distraire cet été.



Une méthode la plus simple – utilisée, dit-on, depuis l'Antiquité – pour dessiner un angle droit lorsque l'on ne dispose que d'une ficelle est d'y faire des nœuds régulièrement espacés et de construire le triangle dont les côtés ont pour longueur 3, 4 et 5. D'après le théorème de Pythagore, un tel triangle est rectangle, car $3^2 + 4^2 = 5^2$. Les nombres 3, 4 et 5 ne sont pas les seuls nombres entiers qui permettent cette construction, et la recherche des solutions de l'équa-

tion $x^2 + y^2 = z^2$ a été l'une des toutes premières activités mathématiques dans presque toutes les civilisations.

Les triplets de nombres entiers x , y , z qui satisfont l'équation sont traditionnellement dénommés triplets pythagoriciens (du nom du philosophe Pythagore, qui vécut au VI^e siècle avant notre ère), ce qui est assez injuste puisque la célèbre tablette babylonienne *Plimpton 322*, vieille de plus de 3 500 ans, contient déjà la liste d'une dizaine de tels triplets.

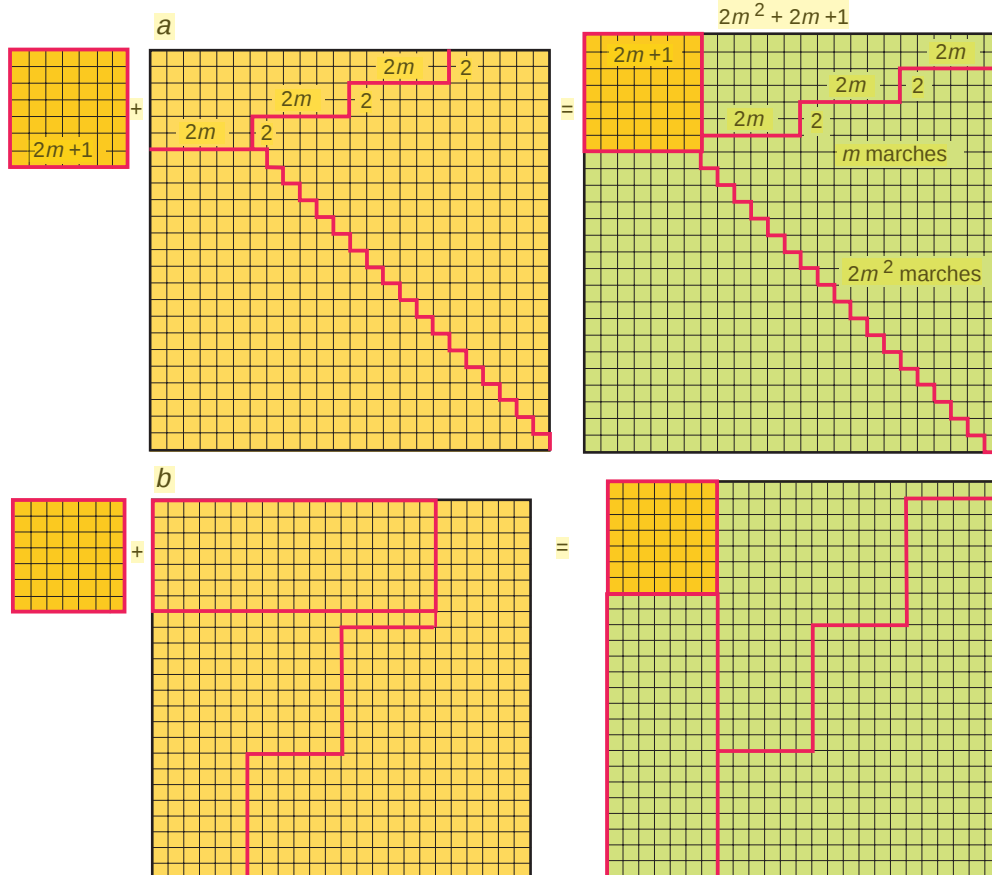
On peut bien sûr multiplier 3, 4 et 5 par un même entier, 2 par exemple, ce qui donne 6, 8, 10, pour obtenir un autre triplet pythagoricien. Mais cette méthode de multiplication ne fournit que les solutions de la forme $(3k, 4k, 5k)$; or il en existe bien d'autres.

Proclus, philosophe néoplatonicien (412-485), dans son commentaire sur le livre I des *Éléments* d'Euclide, attribue à Pythagore la découverte d'une formule générale donnant une famille infinie de triplets pythagoriciens. Cette formule, que nous nommerons formule de Pythagore, s'écrit (avec nos notations modernes qui évidemment n'étaient pas utilisées par Pythagore) : $(n, (n^2 - 1)/2, (n^2 + 1)/2)$, n étant un nombre impair quelconque, ce qui, en posant n égal à $2m + 1$, donne : $(2m + 1, 2m^2 + 2m, 2m^2 + 2m + 1)$, m étant un entier quelconque. On vérifie que la formule fournit des triplets pythagoriciens en développant : $(2m + 1)^2 + (2m^2 + 2m)^2 = (2m^2 + 2m + 1)^2$.

Les quatre premières valeurs de m donnent ainsi les triplets : (3, 4, 5) (5, 12, 13) (7, 24, 25) (9, 40, 41).

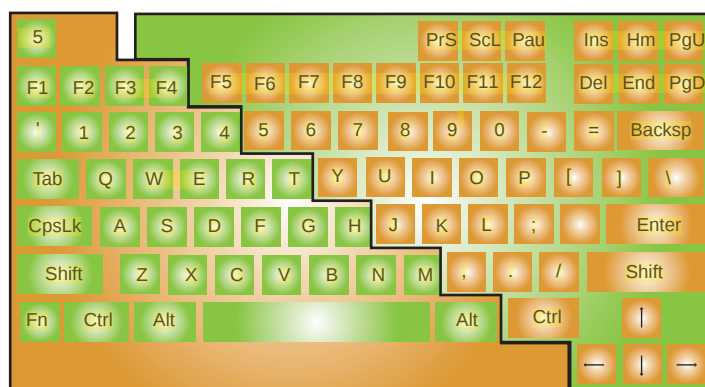
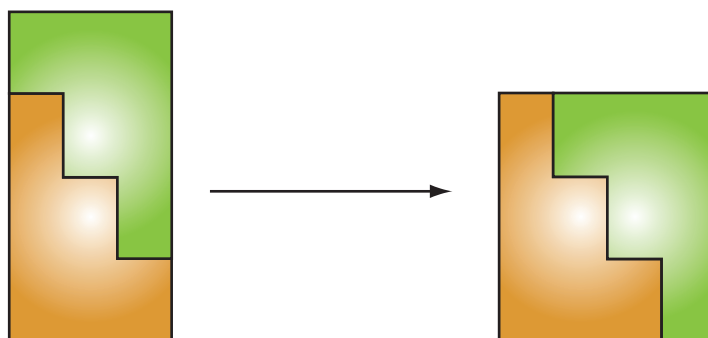
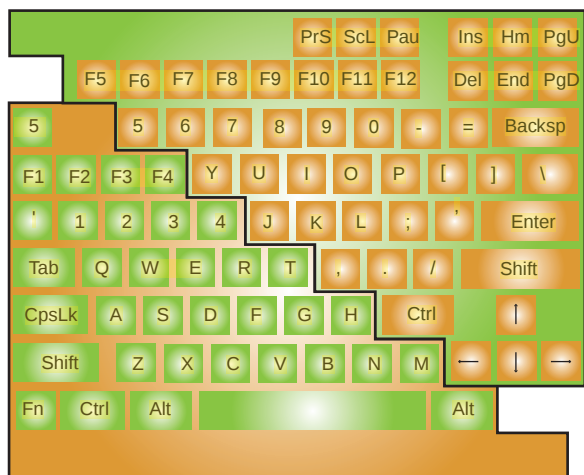
Platon, toujours d'après Proclus, aurait identifié une autre formule générale : $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$, m entier quelconque, qui pour $m = 2$ donne le triplet (4, 3, 5). À l'ordre près, c'est le triplet (3, 4, 5). Pour $m = 3$, on obtient (6, 8, 10) (le double du triplet (3, 4, 5)) et, pour $m = 4$, le triplet (8, 15, 17). Aucune de ces deux formules n'est absolument générale : certains triplets pythagoriciens échappent à la formule de Pythagore, d'autres échappent à celle de Platon.

Certains triplets pythagoriciens échappent même aux deux formules à la fois (même en prenant en compte leurs multiples). Ainsi le triplet pythagoricien (20, 21, 29) qui n'est le multiple d'aucun autre puisque les nombres qui le composent n'ont pas de diviseurs communs, ne provient ni de la formule de Pythagore ni de la formule de Platon, car l'écart entre les deux plus grands entiers n'est ni 1 comme dans la for-



1. Un découpage général (a) en quatre pour les triplets donnés par la formule de Pythagore ; pour ces triplets donnés par $(x, y, z) = (2m + 1, 2m^2 + 2m, 2m^2 + 2m + 1)$, on connaît un procédé général permettant de passer du carré de côté z découpé en quatre morceaux à deux carrés de côté x et de côté y . Ce découpage provient de la généralisation d'un découpage proposé par Sam Loyd pour le triplet (5, 12, 13) en 1899. D'autres découpages (b) en quatre sont parfois possibles, comme celui-ci fondé sur l'identité $7^2 + 24^2 = 25^2$ et publié en 1924 par E. Richard.

2. La technique de l'escalier fait passer, par un découpage en deux pièces, d'un rectangle de côtés $2a$ et $3b$ à un rectangle de côtés $3a$ et $2b$, ou d'un rectangle de côtés $3a$ et $4b$ à un rectangle de côtés $4a$ et $3b$. Cette idée a été reprise pour des claviers d'ordinateurs à double configuration, ce qui gagne de la largeur et permet de replier le clavier contre l'écran. Le clavier de l'ordinateur *ThinkPad 701c* d'*IBM* est conçu ainsi. L'ingénieur John Karidis, auteur de cette « invention » l'aurait trouvée sans rien savoir de son utilité comme technique classique dans les problèmes de découpages.



mule de Pythagore, ni 2 comme dans la formule de Platon. Il faut donc une autre formule. Finalement, la solution générale (découverte, en utilisant une méthode géométrique, proposée par Euclide dans sa proposition 29 du livre X des *Éléments*) est donnée par la formule : $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$, a et b étant deux entiers positifs, a étant supérieur à b .

Certains historiens des mathématiques soupçonnent que les Babyloniens connaissaient déjà des formules équivalentes à celle d'Euclide et qu'ils savaient, il y a plus de 3 500 ans, trouver l'ensemble de tous les triplets pythagoriciens. Ces triplets pythagoriciens, présents dès les premiers balbutiements des mathématiques, suggèrent d'amusants problèmes géométriques qui sont loin d'être tous résolus.

DÉCOUPAGES PYTHAGORIENS

Un triplet pythagoricien (x, y, z) étant donné, il est naturel de se poser la question : peut-on découper un carré de côté z de manière à ce qu'en déplaçant les morceaux on puisse reconstruire deux carrés, l'un de côté x , l'autre de côté y ?

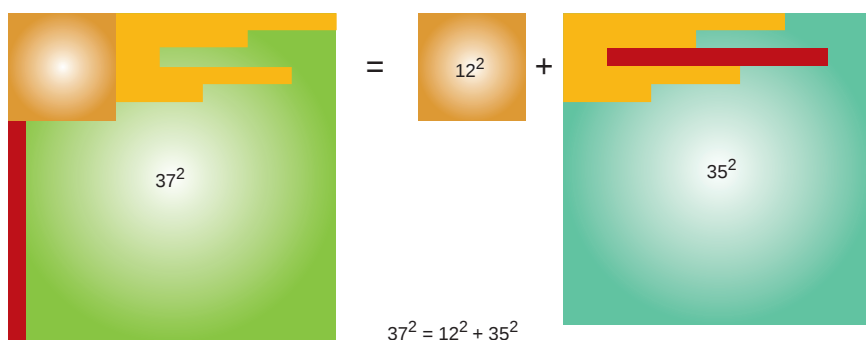
La réponse est, bien sûr, oui, car, en découpant le carré de côté z en z^2 petits carrés de côté 1, on pourra rassembler ceux-ci de façon à avoir, d'une part, un carré de côté x et, de l'autre, un carré de côté y . Le problème ne devient intéressant que si l'on cherche un découpage possédant un nombre aussi petit

que possible de pièces intermédiaires. Un découpage général trouvé en 1873 par l'amateur de récréations géométriques Henry Périgal, montre que cinq pièces suffisent toujours. Périgal, qui était commerçant à Londres, était si fier de son découpage qu'il l'avait fait imprimer sur sa carte de visite et avait demandé qu'il soit gravé sur sa tombe. Ce découpage, dessiné à droite du titre de cet article, a été utilisé par les élèves de seconde du lycée Scheurer-Kestner de Thann sous la direction de leurs professeurs, Alice Kwasny et Bernard Courtois, pour réaliser la figure de gauche célébrant l'an 2000, année des mathématiques. Nous remercions le journal *L'ouvert* de Strasbourg de nous avoir autorisé à reproduire cette illustration.

Si cinq pièces suffisent toujours pour passer d'un carré de côté z aux deux car-

rés de côtés x et y lorsque $x^2 + y^2 = z^2$, il est facile de voir que trois pièces ne suffiront jamais. Si trois pièces suffisaient, l'une d'entre elles comporterait deux coins du grand carré. Ces deux coins ne pourraient pas être des coins d'un petit carré, ils devraient donc être « noyés » dans un des petits carrés, ce qui demande au moins deux pièces de plus, et ne laisse aucune pièce libre pour le dernier carré. Le problème est donc devenu : est-ce que quatre pièces suffisent pour passer d'un grand carré de côtés z à deux petits de côté x et y lorsque (x, y, z) est un triplet pythagoricien ?

La réponse est connue pour les triplets donnés par la formule de Pythagore $(2m + 1, 2m^2 + 2m, 2m^2 + 2m + 1)$. Elle provient de la généralisation d'un découpage proposé par Sam Loyd pour le triplet $(5, 12, 13)$ en 1899 (voir la figure 1).



3. Un découpage général en quatre pour les triplets donnés par la formule de Platon. Harry Lindgren (1912-1992) affirma en 1964 qu'il n'existait de découpages en quatre pièces que pour les triplets donnés par la formule de Pythagore. C'était une erreur comme le découpage suivant de Greg Frederickson le prouve. Ce découpage se généralise à tous les triplets pythagoriciens donnés par la formule de Platon : $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$, m étant un entier quelconque.