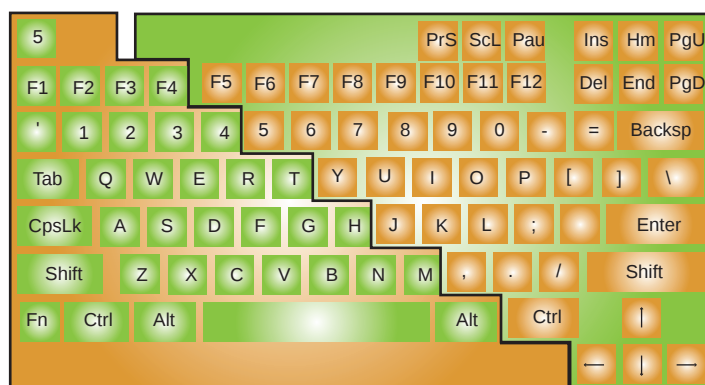
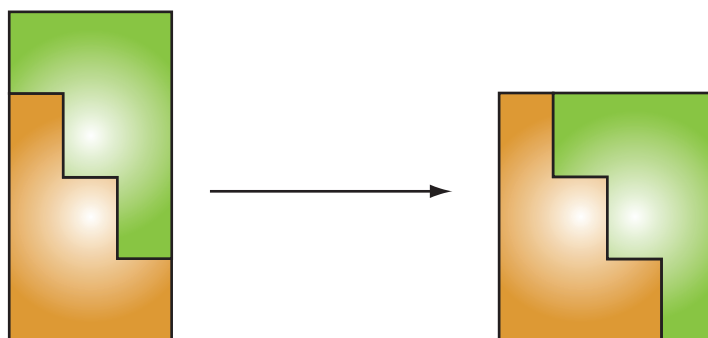


2. La technique de l'escalier fait passer, par un découpage en deux pièces, d'un rectangle de côtés $2a$ et $3b$ à un rectangle de côtés $3a$ et $2b$, ou d'un rectangle de côtés $3a$ et $4b$ à un rectangle de côtés $4a$ et $3b$. Cette idée a été reprise pour des claviers d'ordinateurs à double configuration, ce qui gagne de la largeur et permet de replier le clavier contre l'écran. Le clavier de l'ordinateur *ThinkPad 701c* d'*IBM* est conçu ainsi. L'ingénieur John Karidis, auteur de cette « invention » l'aurait trouvée sans rien savoir de son utilité comme technique classique dans les problèmes de découpages.



mule de Pythagore, ni 2 comme dans la formule de Platon. Il faut donc une autre formule. Finalement, la solution générale (découverte, en utilisant une méthode géométrique, proposée par Euclide dans sa proposition 29 du livre X des *Éléments*) est donnée par la formule : $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$, a et b étant deux entiers positifs, a étant supérieur à b .

Certains historiens des mathématiques soupçonnent que les Babyloniens connaissaient déjà des formules équivalentes à celle d'Euclide et qu'ils savaient, il y a plus de 3 500 ans, trouver l'ensemble de tous les triplets pythagoriciens. Ces triplets pythagoriciens, présents dès les premiers balbutiements des mathématiques, suggèrent d'amusants problèmes géométriques qui sont loin d'être tous résolus.

DÉCOUPAGES PYTHAGORIENS

Un triplet pythagorien (x, y, z) étant donné, il est naturel de se poser la question : peut-on découper un carré de côté z de manière à ce qu'en déplaçant les morceaux on puisse reconstruire deux carrés, l'un de côté x , l'autre de côté y ?

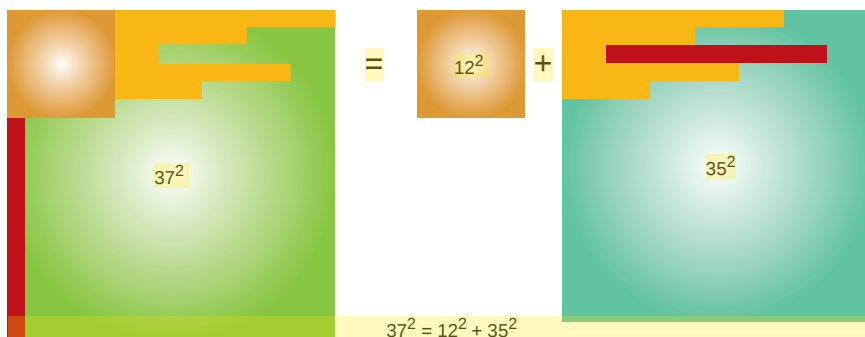
La réponse est, bien sûr, oui, car, en découpant le carré de côté z en z^2 petits carrés de côté 1, on pourra rassembler ceux-ci de façon à avoir, d'une part, un carré de côté x et, de l'autre, un carré de côté y . Le problème ne devient intéressant que si l'on cherche un découpage possédant un nombre aussi petit

que possible de pièces intermédiaires. Un découpage général trouvé en 1873 par l'amateur de récréations géométriques Henry Périgal, montre que cinq pièces suffisent toujours. Périgal, qui était commerçant à Londres, était si fier de son découpage qu'il l'avait fait imprimer sur sa carte de visite et avait demandé qu'il soit gravé sur sa tombe. Ce découpage, dessiné à droite du titre de cet article, a été utilisé par les élèves de seconde du lycée Scheurer-Kestner de Thann sous la direction de leurs professeurs, Alice Kwasny et Bernard Courtois, pour réaliser la figure de gauche célébrant l'an 2000, année des mathématiques. Nous remercions le journal *L'ouvert* de Strasbourg de nous avoir autorisé à reproduire cette illustration.

Si cinq pièces suffisent toujours pour passer d'un carré de côté z aux deux car-

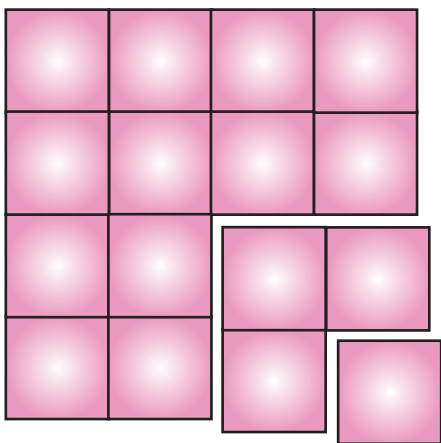
rés de côtés x et y lorsque $x^2 + y^2 = z^2$, il est facile de voir que trois pièces ne suffiront jamais. Si trois pièces suffisaient, l'une d'entre elles comporterait deux coins du grand carré. Ces deux coins ne pourraient pas être des coins d'un petit carré, ils devraient donc être « noyés » dans un des petits carrés, ce qui demande au moins deux pièces de plus, et ne laisse aucune pièce libre pour le dernier carré. Le problème est donc devenu : est-ce que quatre pièces suffisent pour passer d'un grand carré de côtés z à deux petits de côté x et y lorsque (x, y, z) est un triplet pythagorien ?

La réponse est connue pour les triplets donnés par la formule de Pythagore $(2m + 1, 2m^2 + 2m, 2m^2 + 2m + 1)$. Elle provient de la généralisation d'un découpage proposé par Sam Loyd pour le triplet $(5, 12, 13)$ en 1899 (voir la figure 1).

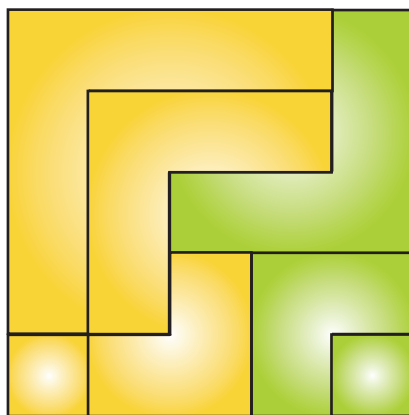


3. Un découpage général en quatre pour les triplets donnés par la formule de Platon. Harry Lindgren (1912-1992) affirma en 1964 qu'il n'existait de découpages en quatre pièces que pour les triplets donnés par la formule de Pythagore. C'était une erreur comme le découpage suivant de Greg Frederickson le prouve. Ce découpage se généralise à tous les triplets pythagoriciens donnés par la formule de Platon : $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$, m étant un entier quelconque.

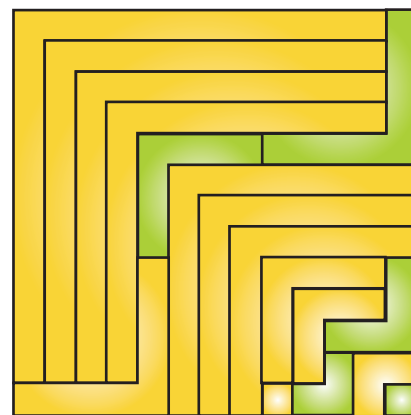
L-DÉCOMPOSITION



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$5^2 + 12^2 = 13^2$$



4. L-décompositions et triplets pythagoriciens. Tout nombre carré se décompose comme somme de nombres impairs successifs, car $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, ce dont on se persuade par un dessin. Ce découpage est la L-décomposition du carré de côté n . La question posée

par Joe Fields est : étant donné un triplet pythagoricien (x, y, z) , peut-on toujours réassembler les pièces de la L-décomposition du carré de côté x et du carré de côté y pour obtenir le carré de côté z ? La réponse définitive à cette question n'est pas connue aujourd'hui.

Ce découpage utilise la «technique de l'escalier», dont l'origine est assez ancienne : Girolamo Cardano (Cardan) avait proposé cette méthode en 1557 pour passer par un découpage en deux pièces d'un rectangle de côtés $2a$ et $3b$ à un rectangle de côtés $3a$ et $2b$, ou d'un rectangle de côtés $3a$ et $4b$ à un rectangle de côtés $4a$ et $3b$ (voir la figure 2). Elle aurait été connue de Léonard de Vinci.

Le grand expert en découpages géométriques Harry Lindgren (1912-1992) affirma, en 1964, qu'il n'existait de découpage en quatre pièces que pour les triplets donnés par la formule de Pythagore (laquelle, rappelons-le, ne donne pas tous les triplets pythagoriciens, contrairement à ce que son nom pourrait laisser croire!). Greg Frederickson, le spécialiste mon-

dial actuel des découpages géométriques a découvert que l'affirmation de Lindgren est fautive : il a en effet proposé un découpage général pour la classe de Platon qui utilise à nouveau la technique de l'escalier mais d'une manière assez subtile (voir la figure 3).

La question posée aujourd'hui est donc : existe-t-il d'autres triplets pythagoriciens qui ne seraient donnés ni par la formule de Pythagore ni par la formule de Platon (comme le triplet (20, 21, 29)) et pour lesquels on pourrait trouver un découpage en quatre morceaux pour passer du carré de côté z aux carrés de côté x et de côté y ? Un lecteur proposera-t-il une solution?

D'autres découpages souvent très astucieux et s'appliquant parfois à des

classes infinies d'identités, comme précédemment, ont été découverts par Greg Frederickson. Vous les trouverez décrites dans son merveilleux livre *Dissection Plane and Fancy* (Cambridge University Press, 1997). Avant de le consulter, essayez pour le plaisir de trouver les découpages en cinq pièces associées aux identités :

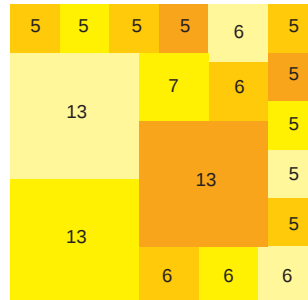
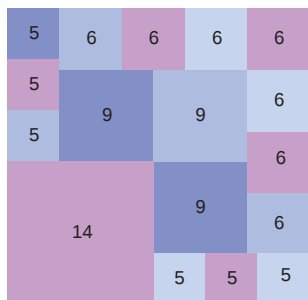
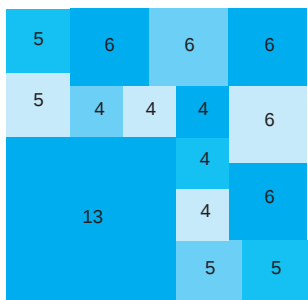
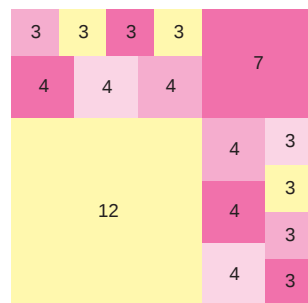
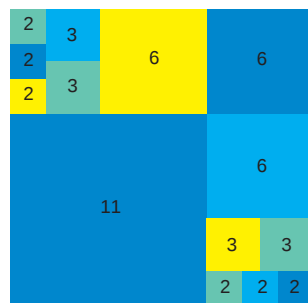
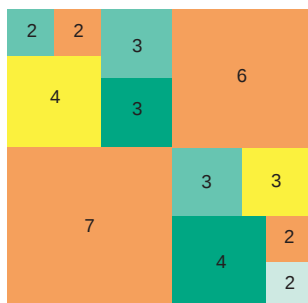
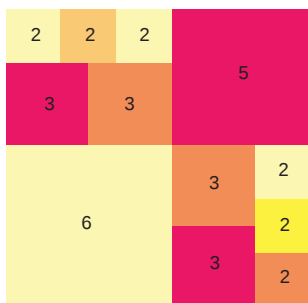
(a) $10^2 + 23^2 = 25^2 + 2^2$

(b) $10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$

(c) $12^2 + 34^2 = 36^2 + 2^2$

DÉCOUPAGES EN PILES DE L

Récemment un étrange problème lié aux triplets pythagoriciens a été posé par Joe Fields ; ce problème occupera peut-être



		$f(n)$ pour n de 2 à 99										
		UNITÉS DE n										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
DIZAINES DE n	0	1	1	2	1	3	1	4	3			
	1	5	2	6	2	7	5	8	2	9	3	
	2	10	7	11	4	12	5	13	9	14	5	
	3	15	5	16	11	17	7	18	7	19	13	
	4	20	6	21	7	22	15	23	7	24	9	
	5	25	17	26	8	27	11	28	19	29	9	
	6	30	10	31	21	32	13	33	10	34	23	
	7	35	11	36	11	37	25	38	14	39	13	
	8	40	27	41	12	42	17	43	29	44	14	
	9	45	14	46	31	47	19	48	14	49	33	

5. La suite d'Erich Friedman : $f(n)$ est le plus grand entier tel qu'il existe un découpage du carré de côté n en carrés plus petits ayant chacun un côté d'au moins $f(n)$ unités ; $f(19) = 3$ signifie que le carré de côté

19 peut être «au mieux» découpé en carrés de côté 3 unités ou plus (pas de carrés plus petits). Les dessins suivants justifient les valeurs de $f(11)$, $f(13)$, $f(17)$, $f(19)$, $f(23)$, $f(29)$ et $f(31)$.