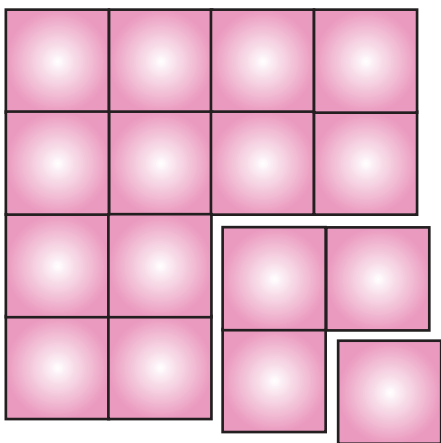
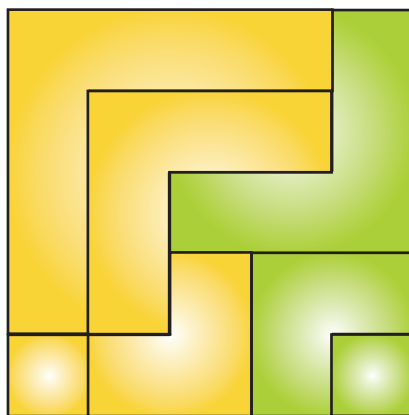


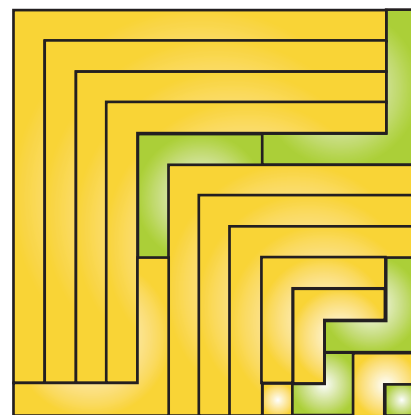
L-DÉCOMPOSITION



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$5^2 + 12^2 = 13^2$$



4. L-décompositions et triplets pythagoriciens. Tout nombre carré se décompose comme somme de nombres impairs successifs, car $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, ce dont on se persuade par un dessin. Ce découpage est la L-décomposition du carré de côté n . La question posée

par Joe Fields est : étant donné un triplet pythagoricien (x, y, z) , peut-on toujours réassembler les pièces de la L-décomposition du carré de côté x et du carré de côté y pour obtenir le carré de côté z ? La réponse définitive à cette question n'est pas connue aujourd'hui.

Ce découpage utilise la «technique de l'escalier», dont l'origine est assez ancienne : Girolamo Cardano (Cardan) avait proposé cette méthode en 1557 pour passer par un découpage en deux pièces d'un rectangle de côtés $2a$ et $3b$ à un rectangle de côtés $3a$ et $2b$, ou d'un rectangle de côtés $3a$ et $4b$ à un rectangle de côtés $4a$ et $3b$ (voir la figure 2). Elle aurait été connue de Léonard de Vinci.

Le grand expert en découpages géométriques Harry Lindgren (1912-1992) affirma, en 1964, qu'il n'existait de découpage en quatre pièces que pour les triplets donnés par la formule de Pythagore (laquelle, rappelons-le, ne donne pas tous les triplets pythagoriciens, contrairement à ce que son nom pourrait laisser croire!). Greg Frederickson, le spécialiste mon-

dial actuel des découpages géométriques a découvert que l'affirmation de Lindgren est fautive : il a en effet proposé un découpage général pour la classe de Platon qui utilise à nouveau la technique de l'escalier mais d'une manière assez subtile (voir la figure 3).

La question posée aujourd'hui est donc : existe-t-il d'autres triplets pythagoriciens qui ne seraient donnés ni par la formule de Pythagore ni par la formule de Platon (comme le triplet (20, 21, 29)) et pour lesquels on pourrait trouver un découpage en quatre morceaux pour passer du carré de côté z aux carrés de côté x et de côté y ? Un lecteur proposera-t-il une solution?

D'autres découpages souvent très astucieux et s'appliquant parfois à des

classes infinies d'identités, comme précédemment, ont été découverts par Greg Frederickson. Vous les trouverez décrites dans son merveilleux livre *Dissection Plane and Fancy* (Cambridge University Press, 1997). Avant de le consulter, essayez pour le plaisir de trouver les découpages en cinq pièces associées aux identités :

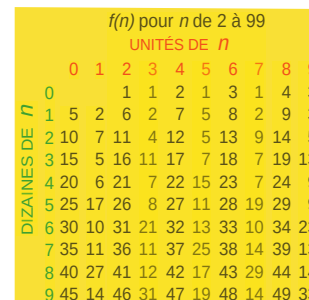
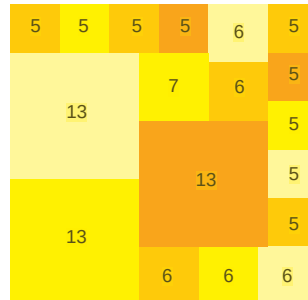
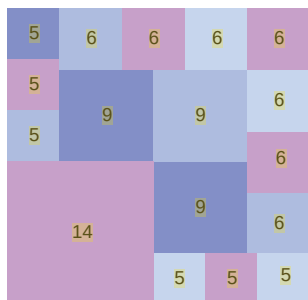
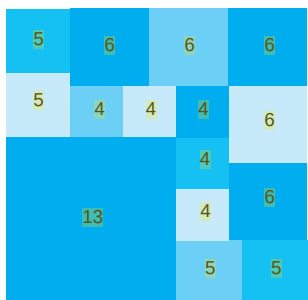
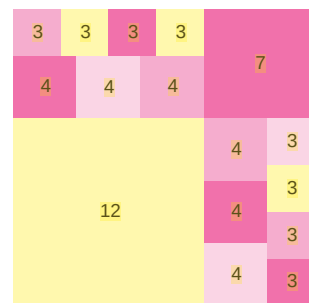
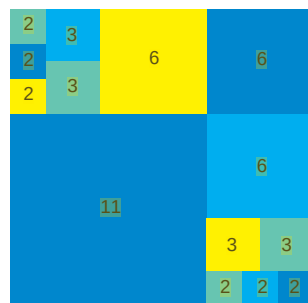
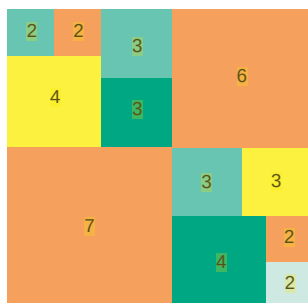
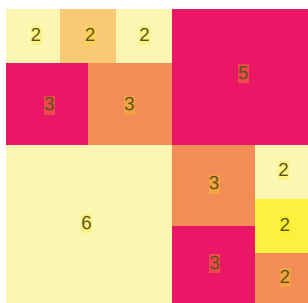
(a) $10^2 + 23^2 = 25^2 + 2^2$

(b) $10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$

(c) $12^2 + 34^2 = 36^2 + 2^2$

DÉCOUPAGES EN PILES DE L

Récemment un étrange problème lié aux triplets pythagoriciens a été posé par Joe Fields ; ce problème occupera peut-être



5. La suite d'Erich Friedman : $f(n)$ est le plus grand entier tel qu'il existe un découpage du carré de côté n en carrés plus petits ayant chacun un côté d'au moins $f(n)$ unités ; $f(19) = 3$ signifie que le carré de côté

19 peut être «au mieux» découpé en carrés de côté 3 unités ou plus (pas de carrés plus petits). Les dessins suivants justifient les valeurs de $f(11)$, $f(13)$, $f(17)$, $f(19)$, $f(23)$, $f(29)$ et $f(31)$.